

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



**Modelação e controlo de veículo submarino com
quatro graus de liberdade**

Bruno Miguel Mateus Ferreira

Dissertação de Projecto realizada no âmbito do
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Major Automação

Orientador: Prof. Dr. Aníbal Castilho Coimbra de Matos

Julho de 2009

Resumo

Nos domínios da automação, muitas questões estão ligadas ao controlo de elementos móveis. Estes elementos possuem dinâmicas dependentes do meio em que estão inseridos, da sua geometria, massa e actuadores, entre outros. Por consequente, a determinação de controladores para estes sistemas é fortemente influenciada por parâmetros intrínsecos a estas características. Durante esta tarefa, é comum a dedução e o uso de modelos que permitam traduzir matematicamente o comportamento do elemento. Em muitos casos, estes poderão servir de base para determinação e desenvolvimento de um controlador. Para além desta razão, a simulação e os testes são alguns dos motivos que levam ao desenvolvimento de modelos, tornando-se ferramentas de avaliação do comportamento de um sistema, principalmente quando existem restrições na implementação e nos testes. Contudo, a modelação é uma aproximação da realidade, sendo, por vezes, difícil traduzir rigorosamente o comportamento de um elemento e as perturbações às quais está sujeito. Os modelos são, portanto, traduções matemáticas do comportamento dinâmico de um sistema com alguma incerteza. Neste trabalho abordam-se as questões de modelação e controlo endereçadas atrás.

Começa-se por deduzir um modelo da dinâmica, com seis graus de liberdade, de um veículo submarino, atendendo a todas as suas características físicas. Isto é alcançado pela determinação de todas as forças exercidas sobre o corpo do veículo durante o seu movimento e pela determinação da dinâmica do corpo rígido. Apresenta-se o método de modelação com o cálculo de todos os coeficientes envolvidos.

A obtenção do modelo permite criar leis de controlo não lineares para a velocidade e para a posição, cujo processo de desenvolvimento se apresenta neste documento. Determinam-se controladores de velocidade e de posição vertical e horizontal que permitem o seguimento de uma recta, o seguimento de uma circunferência e a imobilização na coluna de água.

Implementam-se dois tipos de simulação que visam observar o comportamento e o desempenho do sistema, tentando recriar as condições de operação. Por fim, recolhem-se dados experimentais de forma a validar o modelo e realiza-se a comparação com algumas das grandezas envolvidas no modelo.

Abstract

In the automation domain, most of questions are related to the control of mobile elements. These elements have dynamics that depend on environment where they are inserted, of their geometry, mass and actuators, among others. Consequently, the determination of controllers for these systems is strongly influenced by intrinsic parameters of those characteristics. In this task, it is common to deduce and use models that allow translating mathematically the element behavior. In the most of cases, these would serve as base to determine and develop a controller. Beyond this, the simulation and experiments are reasons that leave to the development of models, becoming evaluation tools of the system behavior, principally when there are constraints of implementation or in experiments. However, the modeling is an approximation, since it is difficult to translate the behavior of an element in a strict way and the disturbances to witch it is subject to. This work addresses the modeling and control questions of an Autonomous Underwater Vehicle.

Initially, this thesis describes the deducing of a dynamic model with six degrees of freedom of an underwater vehicle, considering all of its physical characteristics. This is achieved by the determination of all forces that actuates on the body during its motions and by the determination of the rigid body dynamic. The modeling method is presented as well as the coefficients determination.

The derivation of a model allows the design of nonlinear control laws for velocity and position, whose development process is shown in this thesis. Vertical and horizontal velocity, position controllers that allow follow an imaginary line, circle and stay immobile in the water column are determined.

In order to assess the behavior and the performance of the system, two types of simulation are implemented, trying to recreate operational conditions. Finally, a comparison between the model and experimental data is carried out.

Agradecimentos

A conclusão com sucesso deste trabalho não teria sido possível sem a ajuda de pessoas a quem estou profundamente grato.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Aníbal Matos, pela sua excelente orientação, pelo seu apoio, pelas suas sugestões e pelas inúmeras conversas tidas em prol deste trabalho. Gostaria ainda de lhe agradecer por me ter ajudado a obter uma visão mais ampla das áreas de investigação.

Agradeço ao Prof. Nuno Cruz pela sua disponibilidade, pela sua prontidão quando precisei, por várias vezes, de esclarecimento acerca do MARES e pelo seu apoio aquando da realização de testes.

Fora da faculdade, gostaria de agradecer aos meus pais por todo o apoio que deles obtenho, pelos seus conselhos, pelo interesse que demonstram. Sem eles, nada disto teria sido possível.

Gostaria de agradecer ao meu irmão, pelo papel que desempenha durante o meu tempo livre, pela sua boa disposição.

Por fim, gostaria de agradecer à Suzy, pelo seu apoio, pela motivação que me transmite e pela sua ilimitada paciência, que, ao longo de todo este tempo, me ajudou a alcançar todos os meus objectivos.

Bruno Miguel Mateus Ferreira

Índice

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vii
1 Introdução	1
1.1 Objectivos	1
1.2 Veículos submarinos autónomos	1
1.3 Organização do documento	2
2 Dinâmica e teoria do controlo	3
2.1 Centro de gravidade e centro de flutuação	3
2.2 Sistema de coordenadas	4
2.2.1 Referenciais	4
2.2.2 Cinemática	5
2.3 Dinâmica de um corpo rígido	7
2.3.1 Momento linear	7
2.3.2 Momento angular	8
2.3.3 Representação matricial	9
2.4 Hidrodinâmica	10
2.4.1 Massa acrescentada	10
2.4.2 Forças e momentos de Froude-Kriloff	11
2.4.3 Amortecimento de potencial	12
2.4.4 Amortecimento viscoso	12
2.4.5 Forças e momentos de restabelecimento	14
2.4.6 Forças e momentos de propulsão	15
2.5 Forças e momentos resultantes	16
2.6 Teoria fundamental de Lyapunov	16

2.6.1	Sistemas não lineares e pontos de equilíbrio	17
2.6.2	Estabilidade	17
2.6.3	Método directo de Lyapunov.....	18
2.7	Técnica de <i>Backstepping</i>	20
3	Modelação.....	25
3.1	Veículo submarino autónomo MARES	25
3.1.1	Características	26
3.2	Modelo geométrico.....	28
3.2.1	Projecção inferior	28
3.2.2	Projecção lateral	29
3.2.3	Projecção frontal.....	29
3.3	Modelo do corpo rígido	30
3.3.1	Densidade do veículo	30
3.3.2	Momentos de inércia	32
3.4	Modelo das forças e momentos	32
3.4.1	Massa acrescentada	32
3.4.2	Forças de Froude-Kriloff.....	36
3.4.3	Amortecimento de potencial.....	36
3.4.4	Amortecimento viscoso	36
3.4.5	Forças de restabelecimento.....	39
3.4.6	Força de propulsão	40
3.5	Equações diferenciais do movimento	42
4	Limites de movimento.....	43
4.1	Limites de movimentos axiais	43
4.1.1	Movimento segundo x_B	43
4.1.2	Movimento segundo z_B	44
4.2	Limites de movimentos rotacionais	45
4.2.1	Movimento segundo <i>pitch</i>	45
4.2.2	Movimento segundo <i>yaw</i>	46
4.3	Limites de movimentos compostos	47
4.3.1	Movimento com $u \neq 0$ e $\theta \neq 0$, a profundidade constante	47
4.3.2	Movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$	51

4.4	Considerações sobre o modelo.....	56
4.4.1	Movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$	56
5	Controlo	61
5.1	Controlador de velocidade vertical	61
5.1.1	Redução de ordem do modelo	61
5.1.2	Determinação do controlador	62
5.1.3	Cálculo do ganho.....	64
5.2	Controlador de velocidade horizontal	65
5.2.1	Redução da ordem do modelo	66
5.2.2	Determinação do controlador	66
5.2.3	Determinação do ganho.....	68
5.3	Controlador de posição vertical (1)	69
5.3.1	Redução da ordem do modelo e cinemática.....	69
5.3.2	Determinação do controlador	70
5.3.3	Determinação dos ganhos	73
5.4	Controlador de posição vertical (2)	75
5.4.1	Determinação do controlador	75
5.4.2	Determinação dos ganhos e das saturações dos erros	77
5.5	Controlador de seguimento de recta.....	79
5.5.1	Determinação do controlador	80
5.5.2	Determinação dos ganhos	82
5.6	Controlador de seguimento de circunferência.....	85
5.6.1	Determinação do controlador	86
5.6.2	Determinação dos ganhos	88
5.7	Controlador de imobilização num ponto	90
5.7.1	Determinação do controlador	91
5.7.2	Determinação dos ganhos	93
6	Simulação.....	97
6.1	Simulação de veículo e controladores na mesma plataforma.....	97
6.1.1	Controlo de velocidade vertical.....	97
6.1.2	Controlo de velocidade horizontal	99
6.1.3	Controlo de posição vertical (1)	102
6.1.4	Controlo de posição vertical (2)	104

6.1.5	Controlo de seguimento de recta	106
6.1.6	Controlo de seguimento de circunferência	109
6.1.7	Controlo de imobilização num ponto	111
6.2	Simulação do veículo e controlador em plataformas diferentes	114
6.2.1	Controlo de posição vertical	115
6.2.2	Controlo de seguimento de recta	117
6.2.3	Controlo de seguimento de circunferência	119
6.2.4	Controlo de imobilização num ponto	122
7	Resultados experimentais.....	125
7.1	Amortecimento viscoso segundo <i>yaw</i>	125
7.1.1	Considerações.....	125
7.1.2	Teste	126
7.2	Raio de curvatura.....	128
7.2.1	Considerações.....	128
7.2.2	Teste	128
8	Conclusões	131
8.1	Síntese do trabalho realizado.....	131
8.2	Perspectivas de trabalho futuro	132
8.2.1	Determinação do modelo dos propulsores.....	132
8.2.2	Determinação prática dos coeficientes do modelo	132
8.2.3	Medição da velocidade relativa do veículo	132
8.2.4	Navegação com geração de referências para os controladores.....	133
	Referências.....	135
A	Conjunto de manobras realizáveis.....	137

Índice de figuras

Figura 2.1 – Referenciais considerados	5
Figura 2.2 – Referenciais e posições relativas	12
Figura 2.3 – Vórtices criados pela passagem de um corpo (White, 1999).....	12
Figura 2.4 – Propulsor do AUV MARES (Seabotix, 2009).....	15
Figura 2.5 – Conceitos de estabilidade..	18
Figura 2.6 – Função de Lyapunov típica. Baseada em (Slotine, et al., 1991).	20
Figura 3.1 – Veículo autónomo MARES	25
Figura 3.2 – Projecção superior do MARES.....	26
Figura 3.3 – Projecção lateral do MARES.....	26
Figura 3.4 – Projecção frontal do MARES	26
Figura 3.5 – Indicação da posição dos propulsores.....	40
Figura 4.1 – Movimento com $u \neq 0$ e $\theta \neq 0$, a profundidade constante	47
Figura 4.2 – Forças $FP3$ e $FP4$ necessárias em função de θ , para $u = 0.5m/s$	49
Figura 4.3 – Forças $FP3$ e $FP4$ necessárias em função de θ , para $u = 1.5m/s$	50
Figura 4.4 – Ângulo θ máximo em função da velocidade longitudinal u	51
Figura 4.5 - Movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$	51
Figura 4.6 – Velocidade lateral v em função do raio de curvatura R	53
Figura 4.7 – Ângulo δ realizado com a tangente à circunferência em função do raio de curvatura R	54
Figura 4.8 – Forças aplicadas pelos propulsores $P1$ e $P2$ em função do raio de curvatura para $u = 1m/s$	56
Figura 4.9 – Forças aplicadas pelos propulsores $P1$ e $P2$ em função do raio de curvatura R para $u = 0.5m/s$	57
Figura 4.10 – Forças aplicadas pelos propulsores $P1$ e $P2$ em função do raio de curvatura R para $u = 1.5m/s$	58
Figura 4.11 – Velocidade longitudinal máxima em função do raio de curvatura.	59
Figura 4.12 – Ângulo δ realizado com a tangente à circunferência.....	59
Figura 4.13 – Velocidade angular em função do raio de curvatura para $u = 1m/s$	60
Figura 4.14 – Velocidade longitudinal u máxima em função da velocidade de rotação r	60
Figura 5.1 – Movimento vertical do MARES	62
Figura 5.2 – Movimento horizontal do MARES.....	66
Figura 5.3 - Arquitectura do controlador de posição vertical.....	75

Figura 5.4 - Posição vertical do veículo e respectivas referências.	76
Figura 5.5 - Arquitectura do controlo de posição horizontal.....	79
Figura 5.6 - Estrutura do controlador de posição horizontal.....	80
Figura 5.7 - Aproximação à recta com controlador de aproximação	81
Figura 5.8 - Seguimento de uma recta com ângulo ψ_{ref}	82
Figura 5.9 - Trajectória descrita pelo veículo no seguimento da recta.....	84
Figura 5.10 – Arquitectura do controlador de seguimento de circunferência	85
Figura 5.11 – Aproximação à circunferência	86
Figura 5.12 – Controlo de proximidade da circunferência.....	87
Figura 5.13 – Arquitectura do controlador de imobilização num ponto.	90
Figura 5.14 – Conceitos para o controlo de imobilização	92
Figura 5.15 – Proximidade do ponto de referência.	95
Figura 6.1 – Velocidade linear vertical w em função do tempo.....	98
Figura 6.2 – Velocidade angular vertical q em função do tempo.....	98
Figura 6.3 – Força exercida pelos propulsores em função do tempo.	99
Figura 6.4 – Velocidade longitudinal u em função do tempo.	100
Figura 6.5 – Velocidade angular r em função do tempo.....	100
Figura 6.6 – Força exercida pelos propulsores em função do tempo.	101
Figura 6.7 – Resposta ao degrau da velocidade longitudinal u em função do tempo.	101
Figura 6.8 – Força exercida pelos propulsores verticais em função do tempo ($FP3$ e $FP4$ coincidentes).....	102
Figura 6.9 – Profundidade z em função do tempo para $z_{ref} = 30m$ (1).....	103
Figura 6.10 – Ângulo θ em função do tempo para $\theta = -\pi/6 rad$ (1).	103
Figura 6.11 – Força exercida pelos propulsores verticais para $z_{ref} = 30 m$ e $\theta_{ref} = -\pi/6rad$ (1).	104
Figura 6.12 – Profundidade z em função do tempo para $z_{ref} = 30 m$ (2).....	105
Figura 6.13 - Ângulo θ em função do tempo para $\theta = -\pi/6 rad$ (2).	105
Figura 6.14 – Força exercida pelos propulsores verticais para $z_{ref} = 30 m$ e $\theta_{ref} = -\pi/6rad$ (2).	106
Figura 6.15 – Trajectória descrita pelo veículo durante o seguimento da recta.	107
Figura 6.16 – Projecção horizontal da trajectória descrita pelo veículo durante o seguimento da recta.	107
Figura 6.17 – Erro de distância à recta em função do tempo.	108
Figura 6.18 – Comparação de trajectória para $u = 1m/s$ e $u = 2m/s$	109
Figura 6.19 – Trajectória seguida pelo veículo durante o seguimento do círculo.....	110
Figura 6.20 – Erro de distância ao círculo.....	110
Figura 6.21 – Força exercida pelos propulsores em função do tempo para o seguimento do círculo.....	111
Figura 6.22 – Posição (x, y) em função do tempo para a imobilização num ponto.....	112
Figura 6.23 – Orientação ψ em função do tempo para a imobilização num ponto.	112
Figura 6.24 – Força exercida pelos propulsores para a imobilização num ponto.....	113

Figura 6.25 – Posição real (x,y) em função do tempo, com introdução de ruído, na imobilização num ponto.....	114
Figura 6.26 – Algoritmo seguido na implementação do simulador do veículo e controladores em plataformas diferentes.....	115
Figura 6.27 – Profundidade z em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	116
Figura 6.28 – Ângulo θ em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	116
Figura 6.29 – Força exercida pelos propulsores verticais em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.	117
Figura 6.30 – Trajectória descrita pelo veículo com o seguimento de uma recta para controladores e simulador em plataformas diferentes.....	118
Figura 6.31 – Ângulo ψ em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	118
Figura 6.32 – Velocidade longitudinal em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	119
Figura 6.33 – Trajectória descrita pelo veículo para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	120
Figura 6.34 – Posição (x,y) do veículo no plano horizontal para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	120
Figura 6.35 – Ângulo θ em função do tempo para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	121
Figura 6.36 – Força exercida pelos propulsores horizontais em função do tempo para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	121
Figura 6.37 – Trajectória descrita pelo veículo para a imobilização num ponto com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	122
Figura 6.38 – Posição horizontal (x,y) do veículo em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	122
Figura 6.39 – Ângulo ψ para a imobilização num ponto com controladores e simulador em plataformas diferentes.....	123
Figura 7.1 – Tensão aplicada aos propulsores em função do tempo durante os testes.	127
Figura 7.2 – Ângulo ψ em função do tempo durante os testes.	127
Figura 7.3 – Trajectória obtida na simulação para $FP1 = 13.8\text{ N}$ e $FP2 = -3.45\text{ N}$	129

Índice de tabelas

Tabela 3.1 – Dimensões do AUV MARES.....	26
Tabela 3.2 – Coordenadas do MARES.	27
Tabela 3.3 – Posição dos centros de gravidade e de flutuação em relação ao centro geométrico.	27
Tabela 3.4 – Massa e aceleração da gravidade.....	27
Tabela 3.5 – Peso e força de flutuação.....	28
Tabela 3.6 – Volumes das diversas partes do MARES.....	31
Tabela 3.7 – Densidades das diferentes partes do MARES.	31
Tabela 3.8 – Momentos de inércia.	32
Tabela 3.9 – Coeficientes de massa acrescentada.	36
Tabela 3.10 – Coeficientes de <i>drag</i>	39
Tabela 3.11 – Posição dos centros de gravidade e de flutuação.....	39
Tabela 3.12 – Coordenadas dos pontos de aplicação das forças de propulsão.	41
Tabela 5.1 - Valores de saturação dos erros do controlador de posição vertical (2).....	79
Tabela 5.2 - Valores dos ganhos do controlador de posição vertical (2)	79
Tabela 5.3 - Valores de saturação dos erros do controlador de seguimento de recta.....	85
Tabela 5.4 – Ganhos do controlador de seguimento de recta.....	85
Tabela 5.5 - Valores de saturação dos erros do controlador de imobilização	96
Tabela 5.6 - Valores dos ganhos do controlador de imobilização.....	96
Tabela A.1 – Conjunto de manobras realizáveis.....	137

Abreviaturas e símbolos

Lista de abreviaturas

AUV	<i>Autonomous Underwater Vehicle</i>
CG	Centro de gravidade
CF	Centro de flutuação
FEUP	Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
rpm	Rotações por minuto

Lista de símbolos

C_A	Matriz de termos de Coriolis e centrípetos da massa acrescentada
C_{Dc}	Coefficiente de <i>drag</i> para um corpo cilíndrico
C_{De}	Coefficiente de <i>drag</i> para um corpo elipsoidal
C_{RB}	Matriz de termos de Coriolis e centrípetos do corpo rígido
C_f	Coefficiente de fricção
D_V	Matriz de amortecimento viscoso
F_{pi}	Força exercida pelo propulsor i
F_{pmax}	Força de propulsão máxima
H_S	Altura do sonar
I_{ii}	Momento de inércia em relação ao eixo i
I_{ij}	Momento de inércia em relação ao plano formado pelos eixos i e j
J_1	Matriz de transformação entre referenciais de coordenadas dos vectores lineares
J_2	Matriz de transformação entre referenciais de coordenadas dos vectores angulares
J_o	Quociente de avanço
K_{ij}	Ganho integral do erro segundo j
K_{pj}	Ganho proporcional do erro segundo j
L_S	Diâmetro do sonar
L_m	Comprimento dos motores dos propulsores
M_A	Matriz de massa acrescentada
M_{RB}	Matriz de inércia do corpo rígido
$R_{pv\ xy}$	Raio da projecção inferior dos propulsores verticais do veículo

R_{Pxy}	Raio da projecção inferior dos propulsores horizontais do veículo
R_{Pxz}	Raio da projecção lateral dos propulsores horizontais do veículo
R_e	Número de Reynolds
$R_{x,\phi}$	Matriz de rotação segundo x
R_{xy}	Raio da projecção inferior do invólucro do veículo
R_{xz}	Raio da projecção lateral do invólucro do veículo
$R_{y,\psi}$	Matriz de rotação segundo y
$R_{z,\psi}$	Matriz de rotação segundo z
V_P	Volume de um propulsor
V_{est}	Volume da parte estanque do veículo
V_{perm}	Volume das partes permeáveis do veículo
e_d	Erro de distância à recta ou à circunferência
e_j	Erro segundo a posição ou velocidade j
f_{ext}	Força externa
f_p	Vector das forças exercidas pelos propulsores
k_{α_2}	Ganho do controlador
k_e	Ganho do erro
k_e	Ganho dos controladores
\bar{m}	Massa de fluido
m_{ext}	Momentos externos
p_{ref}	Velocidade de referência segundo <i>roll</i>
q_{ref}	Velocidade de referência segundo <i>pitch</i>
r_B	Posição do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial fixo à Terra
r_{CF}	Centro de flutuação
r_{CG}	Centro de gravidade
r_{CM}	Centro de massa
r_G	Posição do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial fixo à Terra
r_c	Raio de curvatura, variável ao longo do tempo, de uma trajectória
r_{ref}	Velocidade de referência segundo <i>yaw</i>
u_{ref}	Velocidade de referência segundo x
v_B	Velocidade do corpo no seu referencial
v_a	Velocidade de avanço
v_f	Velocidade do fluido
v_{ref}	Velocidade de referência segundo y
w_{ref}	Velocidade de referência segundo z
x_B	Posição segundo o eixo x_B no referencial fixo ao corpo/veículo
x_{ref}	Posição de referência segundo x
y_B	Posição segundo o eixo y_B no referencial fixo ao corpo/veículo
y_{ref}	Posição de referência segundo y
z_B	Posição segundo o eixo z_B no referencial fixo ao corpo/veículo

z_{ref}	Posição de referência segundo z
η_1	Vector de posição linear no referencial fixo à Terra
η_2	Vector de posição angular no referencial fixo à Terra
θ_{ref}	Posição de referência segundo <i>pitch</i>
ρ_f	Densidade do fluido
τ_1	Vector de forças segundo os eixos lineares do referencial fixo ao corpo/veículo
τ_2	Vector de momentos angulares segundo os eixos do referencial fixo ao corpo/veículo
τ_A	Vector de forças e momentos devidos à massa acrescentada
τ_C	Vector de forças e momentos de restabelecimento
τ_{FK}	Vector de forças e momento de Froude-Kriloff
τ_P	Vector de forças e momentos de propulsão
τ_{ext}	Vector de forças e momentos exteriores
v_1	Vector de velocidades lineares no referencial fixo ao corpo/veículo
v_2	Vector de velocidades angulares no referencial fixo ao corpo/veículo
φ_{ref}	Posição de referência segundo <i>roll</i>
ψ_{ref}	Posição de referência segundo <i>yaw</i>
ω_B	Velocidade angular do veículo no seu referencial
B	Flutuação do corpo/veículo
D	Diâmetro das hélices do propulsor
K	Momento exercido segundo <i>roll</i> (segundo x_B)
L	Comprimento do veículo
M	Momento exercido segundo <i>pitch</i> (segundo y_B)
N	Momento exercido segundo <i>yaw</i> (segundo z_B)
P	Matriz de propulsão
R	Raio de curvatura
S	Superfície
S	Matriz que multiplica pela matriz de rotação para a obtenção da derivada desta última
T	Força gerada por um propulsor
V	Volume
$V(\cdot)$	Função de Lyapunov
W	Peso do corpo/veículo
X	Força exercida segundo x_B
Y	Força exercida segundo y_B
Z	Força exercida segundo z_B
e	Erro de velocidade ou de posição
f	Força aplicada num ponto / função genérica
g	Vector de aceleração da gravidade / Vector das forças e momentos de restabelecimento
m	Massa

n	Velocidade de rotação das hélices de um propulsor
p	Velocidade angular segundo <i>roll</i> (segundo x_B)
q	Velocidade angular segundo <i>pitch</i> (segundo y_B)
r	Vector no referencial do corpo
r	Velocidade angular segundo <i>yaw</i> (segundo z_B)
t	Tempo
t	Variável de tempo
u	Velocidade longitudinal (segundo x_B)
v	Velocidade lateral (segundo y_B)
w	Velocidade vertical (segundo z_B)
w	<i>Wake fraction</i>
x	Posição segundo o eixo x no referencial fixo à Terra / Estado do sistema
y	Posição segundo o eixo y no referencial fixo à Terra
z	Posição segundo o eixo z no referencial fixo à Terra
α	Vector de erro
η	Vector de posição linear e angular no referencial fixo à Terra
ν	Viscosidade do fluido
ρ	Densidade
τ	Vector de forças e momentos exercidos sobre o corpo, no seu referencial
v	Vector de velocidade linear e angular no referencial fixo ao corpo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objectivos

Com este trabalho, pretende-se desenvolver um modelo de um veículo submarino autónomo (AUV). Este deverá traduzir com precisão o comportamento do veículo quando inserido num fluido. Pretende-se também desenvolver e implementar um sistema de controlo de posição e atitude para um veículo submarino com quatro graus de liberdade. Este sistema deverá permitir que o veículo submarino permaneça imóvel na coluna de água e possa assumir diferentes atitudes, de forma independente.

O cumprimento destes objectivos implica o conhecimento de algumas matérias que serão abordadas neste documento. Serão objectos de estudo os temas que se enumeram a seguir:

- Segunda lei de Newton;
- Hidrodinâmica de um corpo inserido num fluido;
- Processo de modelação de um veículo submarino;
- Teoria de controlo não linear;
- Métodos de controlo não linear;
- Ferramentas de simulação de sistemas não lineares de ordem elevada.

1.2 Veículos submarinos autónomos

Os AUVs, ou *Autonomous Underwater Vehicles* (ou ainda Veículos Submarinos Autónomos, na sua tradução para português), são sistemas robóticos nos quais se têm centrado interesses ao longo dos últimos anos tanto a nível da modelação (Presterro, 2001), (Fossen, 1994) como do controlo (Gomes, 2002), (Matos, et al., 2009). Este facto tem-se verificado devido ao crescimento geral da robótica. Cada vez mais, hoje em dia, os robots adquirem um papel importante na sociedade, desde as áreas da segurança até à investigação científica, substituindo o Homem em tarefas de risco ou com exigência de elevada precisão, entre outras.

No caso dos AUVs, das principais áreas de aplicação, distinguem-se as seguintes:

- Busca em ambientes aquáticos;
- Investigação oceanográfica;

- Monitorização ambiental;
- Vigilância marítima;
- Inspeção e reparação de estruturas subaquáticas;
- Transporte de curtas e médias distâncias;
- Desminagem;
- Arqueologia;
- Aplicações militares.

Em todos os exemplos de aplicação referidos, os veículos submarinos, necessitam de um controlo robusto que lhes permita a execução de manobras com pouca margem para falhas. A dinâmica do movimento no meio subaquática é fortemente não linear, pelo que isso deve ser tido em conta aquando do desenvolvimento dos controladores. Como base para este desenvolvimento, a determinação e o uso de um modelo podem revelar-se valiosos.

1.3 Organização do documento

A organização deste documento procura seguir a ordem temporal e lógica de desenvolvimento deste trabalho.

Assim, no capítulo 2, expõem-se os conhecimentos fundamentais necessários para a determinação do modelo do veículo assim como dos seus controladores. Definem-se também conceitos, teoremas e nomenclaturas seguidos nos capítulos seguintes.

No capítulo 3, apresenta-se o processo de modelação para o caso concreto do AUV MARES (Cruz, et al., 2008). Em primeiro lugar, determina-se um modelo geométrico do veículo, a partir do qual se determinam, seguidamente, os coeficientes das forças hidrodinâmicas.

No capítulo 4, realiza-se uma análise do comportamento do veículo em determinados regimes. Neste capítulo, é considerada que a actuação é limitada, restringindo o movimento. Calculam-se os valores máximos de várias grandezas tais como as velocidades. À luz desta análise, realizam-se também algumas considerações sobre o modelo determinado.

No capítulo 5, apresentam-se os controladores desenvolvidos bem como os métodos e os conceitos usados para os obter. Para além das expressões de controlo, mostram-se também os cálculos realizados para obtenção dos ganhos e valores de saturação dos erros.

Apresentam-se os resultados das simulações dos controladores no capítulo 6. Neste distinguem-se duas secções diferentes mas complementares relativamente a alguns resultados. Na primeira parte do capítulo, expõem-se os resultados obtidos após a implementação dos controladores na mesma plataforma de simulação que a do veículo. Na segunda parte, apresentam-se os resultados da implementação dos controladores e do simulador em plataformas diferentes. Com isto, pretende-se aproximar a simulação das condições reais de funcionamento.

No capítulo 7, mostram-se os resultados adquiridos no decorrer de experiências no terreno. Com estes, realiza-se uma comparação com os resultados obtidos no processo de modelação.

No capítulo 8, realiza-se uma síntese do trabalho realizado, com alguns comentários relativos aos desenvolvimentos, e estabelecem-se algumas indicações sobre o trabalho futuro.

Capítulo 2

Dinâmica e teoria do controlo

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos fundamentais para o desenvolvimento do modelo e dos controladores. Começa-se por apresentar os conceitos de posicionamento em robótica, prosseguindo com a dinâmica do corpo rígido e com as diversas forças que nele actuam. Expõem-se também os principais conceitos de controlo e um método usado para a determinação de controladores.

2.1 Centro de gravidade e centro de flutuação

Numa partícula, a acção da gravidade induz uma força proporcional à sua massa. Considerando que um corpo é composto por um número finito de partículas, todas estas estão sujeitas à acção da gravidade. Seria impraticável considerar todas as partículas individualmente num corpo. Assim, surge a necessidade de recorrer ao conceito de centro de gravidade. O centro de gravidade é o ponto no qual se pode considerar que a força da gravidade se concentra.

Assumindo que a aceleração da gravidade é constante em todo o volume de um corpo, o centro de gravidade, r_{CG} , é coincidente com o centro de massa, r_{CM} . Tal facto é considerado verdadeiro nas próximas secções. Assim, para um corpo com volume V e massa m , vem:

$$r_{CG} = r_{CM} = \frac{1}{m} \int_V \rho(r)r \, dV, \quad (2.1)$$

em que $\rho(r)$ é a densidade de massa do corpo e r um vector.

Um corpo submerso num fluido possui uma força contrária à força originada pela gravidade. Esta é chamada força de flutuação. Tal como no caso da força gravítica, é desejável a obtenção de um centro de flutuação. Este é coincidente com o centro de massa do fluido deslocado pelo volume do corpo. Considerando que a densidade do fluido é constante na superfície do corpo, o centro de flutuação coincide com o centro geométrico do mesmo, isto é:

$$r_{CF} = \frac{1}{V} \int_V r dV. \quad (2.2)$$

2.2 Sistema de coordenadas

2.2.1 Referenciais

Na robótica, a posição de um corpo é conhecida recorrendo a pontos de referência (Siegwart, et al., 2004), (Moreira, 2008). Existem muitos exemplos de posição relativa dos quais se podem destacar os seguintes: a medição da longitude no globo terrestre possui como referência o meridiano de Greenwich (longitude=0°) definido por convenção; da mesma forma, a linha do equador serve de referência para a medição da latitude. Estes referenciais estão fixos à Terra. Assumindo que as suas acelerações de translação e de rotação são nulas, podem-se considerar os referenciais fixos à Terra inerciais. Um referencial inercial é um referencial que não está sujeito a acelerações lineares nem angulares.

Por conveniência, definem-se dois referenciais: um inercial fixo à Terra $\{x, y, z\}$ e outro fixo ao corpo $\{x_B, y_B, z_B\}$ como ilustra a figura 2.1. É desejável que algumas grandezas sejam referenciadas num ou noutro referencial, de modo a simplificar e reduzir expressões matemáticas. Adoptando a mesma nomenclatura que em (Fossen, 1994), tem-se

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} K \\ M \\ N \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

em que η_1 e η_2 são a posição e a orientação, respectivamente, do referencial fixo ao corpo relativamente ao referencial inercial; v_1 e v_2 são as velocidades linear e angular no referencial fixo ao corpo; τ_1 e τ_2 são a força e o momento exercidos sobre o corpo no referencial que lhe está associado.

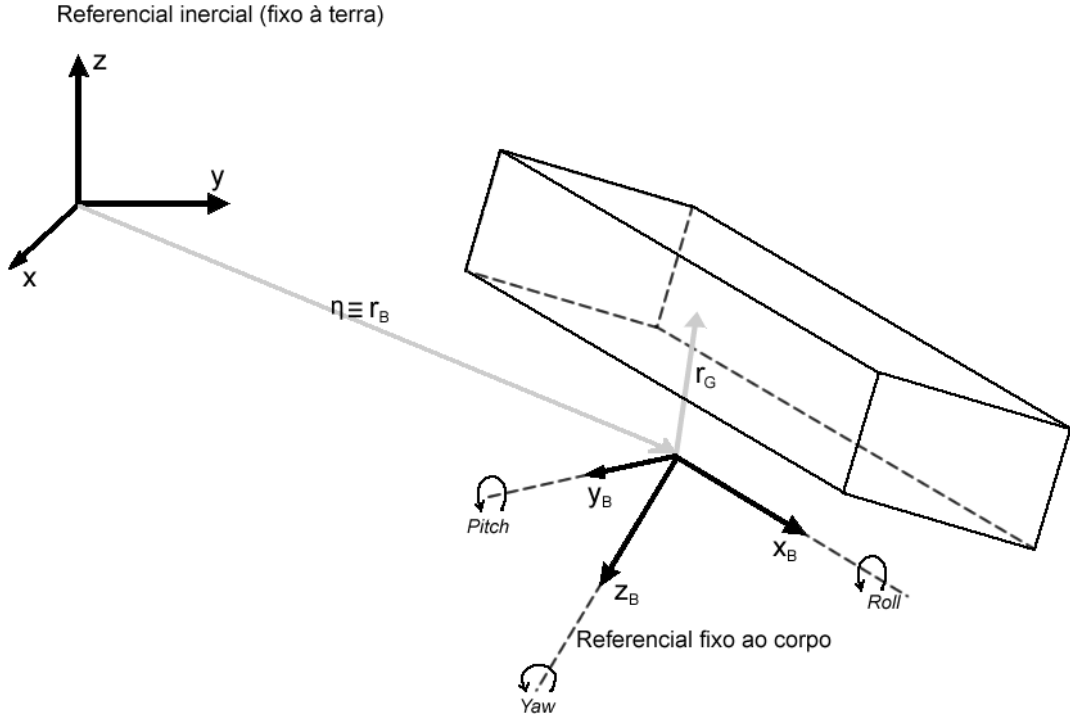


Figura 2.1 – Referenciais considerados.

Nas secções seguintes usar-se-á a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \begin{bmatrix} \eta_1 \\ - \\ \eta_2 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T, \\
 v &= \begin{bmatrix} v_1 \\ - \\ v_2 \end{bmatrix} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T, \\
 \tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ - \\ \tau_2 \end{bmatrix} = [X \ Y \ Z \ K \ M \ N]^T.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.2 Cinemática

Dada a orientação do referencial fixo ao corpo relativamente ao referencial fixo à Terra, é possível relacionar os vectores de ambos. A orientação do referencial $\{x, y, z\}$ pode ser obtida através de três rotações elementares segundo cada eixo do referencial fixo ao corpo $\{x_B, y_B, z_B\}$, isto é, uma rotação segundo x_B de um ângulo ϕ , seguido de uma rotação de um ângulo θ segundo y_B e de uma rotação de um ângulo ψ segundo z_B . Obtêm-se as respectivas matrizes de rotação, segundo cada eixo

$$\begin{aligned}
 R_{x,\phi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \\
 R_{y,\psi} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Define-se a matriz de transformação entre referenciais, seguindo a nomenclatura em (Fossen, 1994), tal que:

$$\begin{aligned} J_1(\phi, \theta, \psi) &= J_1(\eta_2) = R_{z,\psi} R_{y,\psi} R_{x,\phi} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Note-se que J_1 é ortonormal, pelo que $J_1^{-1} = J_1^T$.

A velocidade linear v_1 no referencial do corpo, $\{x_B, y_B, z_B\}$, relaciona-se com a velocidade linear do corpo $\dot{\eta}_1$ no referencial fixo à Terra, $\{x, y, z\}$, da seguinte forma:

$$\dot{\eta}_1 = J_1(\eta_2) v_1, \quad (2.9)$$

e, inversamente,

$$v_1 = J_1^T(\eta_2) \dot{\eta}_1. \quad (2.10)$$

Conhecendo a velocidade angular do corpo no referencial inercial ($\dot{\eta}_2$), é possível obtê-la em relação ao referencial do corpo (v_2):

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}^{-1} R_{y,\psi}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Reescrevendo a expressão anterior sob a forma $v_2 = J_2^{-1} \dot{\eta}_2$, obtém-se

$$J_2^{-1}(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Note-se que $J_2^{-1} \neq J_2^T$. A matriz de transformação dos vectores angulares é dada por:

$$J_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Usando a representação dada nas expressões (2.3), pode-se escrever de forma mais compacta a relação das velocidades lineares e angulares nos referenciais inercial e fixo ao corpo:

$$\dot{\eta} = J(\eta_2) v, \quad (2.14)$$

com

$$J(\eta_2) = \begin{bmatrix} J_1(\eta_2) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.3 Dinâmica de um corpo rígido

Nesta secção, é importante definir previamente alguns conceitos. A segunda lei de Newton relaciona a aceleração de um corpo rígido com as forças que nele actuam. Esta assenta no facto de um corpo no repouso se movimentar apenas se uma força lhe for aplicada. No caso contrário, um corpo em movimento atingirá o estado de repouso apenas se uma força no sentido contrário ao seu movimento lhe for aplicada. Interessa ainda referir que um corpo rígido é um corpo indeformável constituído por um número finito de partículas.

2.3.1 Momento linear

Considere-se um corpo com densidade de massa $\rho_B(r_G)$, volume V e superfície S . Um ponto do corpo encontra-se na posição $r = r_B + r_G$ em que r_B é o vector de posição da origem do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial inercial absoluto e r_G um vector de posição no referencial do corpo.

A expressão da segunda lei de Newton para a conservação do momento linear é dada por:

$$\int_V \frac{d^2 r}{dt^2} \rho_B(r_G) dV = \int_V \rho_B(r_G) g dV + \int_S f(r_G) dS, \quad (2.16)$$

em que g é o vector de aceleração da gravidade, $f(r_G)$ é a força aplicada no ponto r_G , dV e dS são uma porção infinitesimal de volume e de superfície do corpo, respectivamente.

Considerando que o corpo possui massa constante ($m = \int_V \rho_B(\vec{r}) dV$, $m \in \mathbb{R}$), é possível deduzir a expressão

$$m(\dot{v}_B + \omega_B \times v_B + \dot{\omega}_B \times r_{CG} + \omega_B \times (\omega_B \times r_{CG})) = \sum f_{ext}, \quad (2.17)$$

em que:

- $v_B \equiv \dot{\eta}_1$ é a velocidade da origem do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial inercial;
- $\dot{v}_B \equiv \dot{v}_1$ é a derivada em ordem ao tempo da velocidade no referencial fixo ao corpo;
- $\omega_B \equiv v_2$ é a velocidade angular segundo cada eixo do referencial fixo ao corpo;
- $r_{CG} = (x_{CG}, y_{CG}, z_{CG})^T$ é a posição do centro de gravidade do corpo;
- $\sum f_{ext} = (\sum X_{ext}, \sum Y_{ext}, \sum Z_{ext})^T$ é a soma das forças externas que actuam no corpo.

Decompondo as forças segundo os eixos cartesianos do referencial do corpo, obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum X_{ext} &= m(\dot{u} - vr + wq - x_{CG}(q^2 + r^2) + y_{CG}(pq - \dot{r}) + z_{CG}(pr + \dot{q})); \\
\sum Y_{ext} &= m(\dot{v} - wp + ur - y_{CG}(r^2 + p^2) + z_{CG}(qr - \dot{p}) + x_{CG}(qp + \dot{r})); \\
\sum Z_{ext} &= m(\dot{w} - uq + vp - z_{CG}(p^2 + q^2) + x_{CG}(rp - \dot{q}) + y_{CG}(rq + \dot{p})).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

A dedução detalhada destas expressões pode ser consultada em (Fossen, 1991).

2.3.2 Momento angular

Relativamente à conservação do momento angular, a segunda lei de Newton dá a seguinte expressão:

$$\int_V \frac{d}{dt} \left(r \times \frac{dr}{dt} \right) \rho_B(r_G) dV = \int_V r \times \rho_B(r_G) g dV + \int_S r \times f(r_G) dS. \tag{2.19}$$

O desenvolvimento desta expressão (Fossen, 1991) dá:

$$mr_G \times \dot{v}_o + mr_G \times (\omega_B \times v_B) + I_B \dot{\omega}_B + \omega_B \times (I_B \omega_B) = \sum m_{ext}, \tag{2.20}$$

em que $\sum m_{ext} = (\sum K_{ext}, \sum M_{ext}, \sum N_{ext})^T$ é a soma dos momentos exercidos no corpo e $I_B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ o tensor de inércia (Tovar de Lemos, 1998) dado por

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

com

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_V (y^2 + z^2) \rho_B dV ; \quad I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) \rho_B dV ; \quad I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho_B dV ; \\
I_{xy} &= \int_V xy \rho_B dV ; \quad I_{xz} = \int_V xz \rho_B dV ; \quad I_{yz} = \int_V yz \rho_B dV.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Decompondo os momentos exercidos sobre o corpo segundo cada eixo de rotação no seu referencial, vem:

$$\begin{aligned}
\sum K_{ext} &= I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} \\
&\quad + m(y_G(\dot{w} - uq + vp) - z_G(\dot{v} - wp + ur));
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\sum M_{ext} &= I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{xz} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\
&\quad + m(z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)); \\
\sum N_{ext} &= I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{xz} \\
&\quad + m(x_G(\dot{v} - wp + ur) - y_G(\dot{u} - vr + wq)).
\end{aligned}$$

2.3.3 Representação matricial

É possível reescrever as expressões dadas por (2.18) e (2.23) sob a forma matricial. Para tal, considere-se τ_{ext} o vector da soma de todas as forças e momentos exercidos sobre o corpo tal que

$$\tau_{ext} = \begin{bmatrix} \sum f_{ext} \\ \sum m_{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum X_{ext} \\ \sum Y_{ext} \\ \sum Z_{ext} \\ \sum K_{ext} \\ \sum M_{ext} \\ \sum N_{ext} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Pode-se escrever

$$\tau_{ext} = M_{RB} \ddot{\eta} + C_{RB}(\dot{\eta}) \dot{\eta}, \quad (2.25)$$

em que $M_{RB} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é uma matriz constante conhecida como a matriz de inércia do corpo rígido, dada por:

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$C_{RB}(\dot{\eta}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é uma matriz variável conhecida como matriz dos termos de Coriolis e centrípetos (Fossen, 1994). Esta é dada por

$$\begin{aligned}
&C_{RB} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -mr & mq & m(y_G q + z_G r) & -mx_G q & -mx_G r \\ mr & 0 & -mp & -my_G p & m(z_G r + x_G p) & -my_G r \\ -mq & mp & 0 & -mz_G p & -mz_G q & m(x_G p + y_G q) \\ -m(y_G q + z_G r) & my_G p & mz_G p & 0 & -I_{yz} q - I_{xz} p + I_{zz} r & I_{yz} r + I_{xy} p - I_{yy} q \\ mx_G q & -m(z_G r + x_G p) & mz_G q & I_{yz} q + I_{xz} p - I_z r & 0 & -I_{xz} r - I_{xy} q + I_{xx} p \\ mx_G r & my_G r & -m(x_G p + y_G q) & -I_{yz} r - I_{xy} p + I_{yy} q & I_{xz} r + I_{xy} q - I_{xx} p & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

2.4 Hidrodinâmica

Nesta secção, apresentam-se as forças geradas pelo movimento de um corpo num fluido, determinando as expressões que lhes estão associadas. Algumas considerações serão realizadas, de modo a simplificar as expressões.

2.4.1 Massa acrescentada

Um corpo em movimento, inserido num fluido estacionário, gera um movimento das partículas que o envolvem. A aceleração destas partículas induz forças e momentos contrários ao movimento do corpo (Tchet, 2005). Estes são conhecidos como forças e momentos de massa acrescentada.

Tal como sucede com a dinâmica de um corpo na secção 2.3, é realizada uma separação dos termos dependentes das acelerações e das velocidades do corpo, por conveniência. As forças e momentos que actuam no corpo devido ao efeito da massa acrescentada são dados por

$$\tau_A(\dot{v}, v) = -M_A \dot{v} - C_A(v)v, \quad (2.28)$$

em que τ_A é o vector de forças e momentos de massa acrescentada totais. Designa-se a matriz $M_A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ por matriz de massa acrescentada e é dada por

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\ddot{u}} & X_{\ddot{v}} & X_{\ddot{w}} & X_{\ddot{p}} & X_{\ddot{q}} & X_{\ddot{r}} \\ Y_{\ddot{u}} & Y_{\ddot{v}} & Y_{\ddot{w}} & Y_{\ddot{p}} & Y_{\ddot{q}} & Y_{\ddot{r}} \\ Z_{\ddot{u}} & Z_{\ddot{v}} & Z_{\ddot{w}} & Z_{\ddot{p}} & Z_{\ddot{q}} & Z_{\ddot{r}} \\ K_{\ddot{u}} & K_{\ddot{v}} & K_{\ddot{w}} & K_{\ddot{p}} & K_{\ddot{q}} & K_{\ddot{r}} \\ M_{\ddot{u}} & M_{\ddot{v}} & M_{\ddot{w}} & M_{\ddot{p}} & M_{\ddot{q}} & M_{\ddot{r}} \\ N_{\ddot{u}} & N_{\ddot{v}} & N_{\ddot{w}} & N_{\ddot{p}} & N_{\ddot{q}} & N_{\ddot{r}} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

onde M_A é positiva definida¹, isto é $M_A > 0$.

A matriz dos termos de Coriolis e centrípetos, $C_A(v)$, é dada por

$$C_A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_A^{15} & C_A^{16} \\ 0 & 0 & 0 & C_A^{24} & 0 & C_A^{26} \\ 0 & 0 & 0 & C_A^{34} & C_A^{35} & 0 \\ 0 & -C_A^{24} & -C_A^{34} & 0 & C_A^{45} & C_A^{46} \\ -C_A^{15} & 0 & -C_A^{35} & -C_A^{45} & 0 & C_A^{56} \\ -C_A^{16} & -C_A^{26} & 0 & -C_A^{46} & -C_A^{56} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned} C_A^{15} &= -X_{\dot{w}}u - Y_{\dot{w}}v - Z_{\dot{w}}w - Z_{\dot{p}}p - Z_{\dot{q}}q - Z_{\dot{r}}r; \\ C_A^{16} &= X_{\dot{v}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r; \end{aligned} \quad (2.31)$$

¹ O conceito de positiva definida será definido na secção 2.6

$$\begin{aligned}
C_A^{24} &= X_{\dot{w}}u + Y_{\dot{w}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r ; \\
C_A^{26} &= -X_{\dot{u}}u - X_{\dot{v}}v - X_{\dot{w}}w - X_{\dot{p}}p - X_{\dot{q}}q - X_{\dot{r}}r ; \\
C_A^{34} &= -X_{\dot{v}}u - Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{w}}w - Y_{\dot{p}}p - Y_{\dot{q}}q - Y_{\dot{r}}r ; \\
C_A^{35} &= X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r ; \\
C_A^{45} &= -X_{\dot{r}}u - Y_{\dot{r}}v - Z_{\dot{r}}w - K_{\dot{r}}p - M_{\dot{r}}q - N_{\dot{r}}r ; \\
C_A^{46} &= X_{\dot{q}}u + Y_{\dot{q}}v + Z_{\dot{q}}w + K_{\dot{q}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r ; \\
C_A^{56} &= -X_{\dot{p}}u - Y_{\dot{p}}v - Z_{\dot{p}}w - K_{\dot{p}}p - K_{\dot{q}}q - K_{\dot{r}}r .
\end{aligned}$$

A dedução destas expressões pode ser consultada em (Fossen, 1991).

2.4.2 Forças e momentos de Froude-Kriloff

As forças e momentos de Froude-Kriloff devem-se à deslocação de fluido na presença de um corpo. Assumindo que o corpo da figura 2.2 está em repouso e que o fluido está em movimento, a massa de fluido deslocada devido à presença do corpo é dada por

$$\bar{m} = \int_V \rho_f dV, \quad (2.32)$$

em que V é o volume do corpo rígido, ρ_f a densidade do fluido envolvente.

A forças e momentos exercidos são dados por

$$\tau_{FK}(\dot{v}_f) = M_{FK} \dot{v}_f, \quad (2.33)$$

onde $\dot{v}_f = [\dot{u}_f, \dot{v}_f, \dot{w}_f, 0, 0, 0]$ é o vector de aceleração do fluido. Note-se que o fluido é considerado irrotacional, isto é $p_f = q_f = r_f = 0$. A matriz de inércia de Froude-Kriloff é dada por

$$M_{FK} = \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 & 0 & 0 & \bar{m}z_{CF} & -\bar{m}y_{CF} \\ 0 & \bar{m} & 0 & -\bar{m}z_{CF} & 0 & \bar{m}x_{CF} \\ 0 & 0 & \bar{m} & \bar{m}y_{CF} & -\bar{m}x_{CF} & 0 \\ 0 & -\bar{m}z_{CF} & \bar{m}y_{CF} & \bar{I}_{xx} & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ \bar{m}z_{CF} & 0 & -\bar{m}x_{CF} & -\bar{I}_{xy} & \bar{I}_{yy} & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{m}y_{CF} & \bar{m}x_{CF} & 0 & -\bar{I}_{xz} & -\bar{I}_{yz} & \bar{I}_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Dado que o fluido é irrotacional, apenas os termos das três primeiras colunas de M_{FK} são necessários para o cálculo das forças e momentos de Froude-Kriloff.

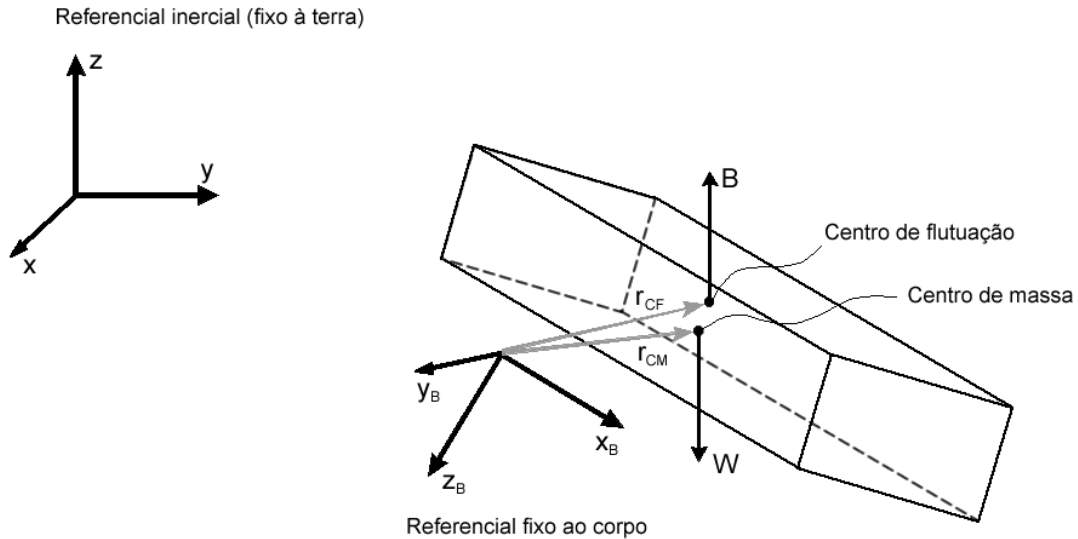


Figura 2.2 – Referenciais e posições relativas.

2.4.3 Amortecimento de potencial

A força resultante do amortecimento de potencial depende linearmente da velocidade do veículo:

$$\tau_B(v_r) = -D_B v_r, \quad (2.35)$$

em que $D_B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é uma matriz positiva definida de termos constantes.

Comparada com as restantes forças que actuam num corpo o amortecimento de potencial é desprezável para corpos submersos (Fossen, 1994). Em muitos casos esta força é incluída nas forças de amortecimento viscoso.

2.4.4 Amortecimento viscoso

O amortecimento viscoso deve-se essencialmente à contribuição linear e quadrática da fricção na camada exterior do corpo, à pressão criada pelo movimento (Yue, 2005a) e ao arrastamento devido aos vórtices (White, 1999) criados pelo movimento relativo do fluido na superfície do corpo.



Figura 2.3 – Vórtices criados pela passagem de um corpo (White, 1999).

As forças e momentos de *drag* exercidos sobre o corpo são dependentes das velocidades lineares e angulares relativas:

$$v_r = v - v_f = [u_r, v_r, w_r, p_r, q_r, r_r], \quad (2.36)$$

sendo v_f o vector das velocidades do fluido definido na secção anterior.

Em termos práticos, a totalidade das forças e momentos de *drag*, τ_V pode ser aproximada pelos dois primeiros termos de uma série de Taylor (Fossen, 1991), embora possuam termos de ordem mais elevada:

$$\tau_V = -D_L v_r - d_Q(v_r), \quad (2.37)$$

em que $D_L \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz dos coeficientes dos termos lineares, positiva definida, tal que

$$D_L = - \begin{bmatrix} X_u & X_v & X_w & X_p & X_q & X_r \\ Y_u & Y_v & Y_w & Y_p & Y_q & Y_r \\ Z_u & Z_v & Z_w & Z_p & Z_q & Z_r \\ K_u & K_v & K_w & K_p & K_q & K_r \\ M_u & M_v & M_w & M_p & M_q & M_r \\ N_u & N_v & N_w & N_p & N_q & N_r \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Os termos quadráticos são dados por $d_Q(v_r) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$:

$$d_Q(v_r) = - \begin{bmatrix} v_r X_Q |v_r| \\ v_r Y_Q |v_r| \\ v_r Z_Q |v_r| \\ v_r K_Q |v_r| \\ v_r M_Q |v_r| \\ v_r N_Q |v_r| \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

onde $X_Q, Y_Q, Z_Q, K_Q, M_Q, N_Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ são matrizes de termos constantes. Em muitas aplicações, os termos fora da diagonal principal destas matrizes podem ser desprezados, assim como para D_L .

A soma de todas as forças e momentos devido ao amortecimento viscoso vem:

$$\tau_V(v_r) = -D_V(v_r) v_r \quad (2.40)$$

e

$$D_V(v_r) = - \begin{bmatrix} X_u + X_{u|u}|u_r| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_v + Y_{v|v}|v_r| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_w + Z_{w|w}|w_r| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p + K_{p|p}|p_r| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_q + M_{q|q}|q_r| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_r + N_{r|r}|r_r| \end{bmatrix}$$

(2.41)

Os coeficientes dos termos quadráticos da matriz D_V são dependentes das áreas projectadas do corpo nos planos formados pelos eixos do referencial que lhe está fixado. Definindo A_{xy} , A_{xz} e A_{yz} como sendo as áreas projectadas nos planos $\{x_B, y_B\}$, $\{x_B, z_B\}$ e $\{y_B, z_B\}$ respectivamente (ver figura 2.2), obtém-se, para os elementos da diagonal principal:

$$\begin{aligned}
 X_{u|u} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_{du} \int_{A_{yz}} dA; \\
 Y_{v|v} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_{dv} \int_{A_{xz}} dA; \\
 Z_{w|w} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_{dw} \int_{A_{xy}} dA; \\
 K_{p|p} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_{dp} \int_{A_{yz}} |r_G|^3 dA; \\
 M_{q|q} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_{dq} \int_{A_{xy}} |r_G|^3 dA; \\
 N_{r|r} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_{dr} \int_{A_{xz}} |r_G|^3 dA;
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

em que ρ_f é a densidade do fluido em que o corpo está inserido, C_{di} com $i = u, v, w, p, q, r$ é o coeficiente de amortecimento viscoso segundo o eixo i (*axial drag coefficient*) (Presterio, 2001) que depende da geometria do corpo. Este último pode ser obtido por expressões deduzidas empiricamente ou experimentalmente.

2.4.5 Forças e momentos de restabelecimento

As forças e momentos de restabelecimento devem-se à acção da gravidade e da flutuação de um corpo inserido num fluido. Recorrendo à figura 2.2, pode deduzir-se que as forças e momentos exercidas são dadas por

$$\tau_c(\eta) = -g(\eta) = \begin{bmatrix} J_1^{-1}(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W - B \end{bmatrix} \\ r_{CM} \times W - r_{CF} \times B \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Em que $J_1^{-1}(\phi, \theta, \psi)$ é a matriz de transformação definida na secção 2.2

$$\tau_c(\eta) = - \begin{bmatrix} (W - B) \sin \theta \\ (B - W) \cos \theta \sin \phi \\ (B - W) \cos \theta \cos \phi \\ (y_{CF}B - y_{CM}W) \cos \theta \cos \phi + (z_{CM}W - z_{CF}B) \cos \theta \sin \phi \\ (z_{CM}W - z_{CF}B) \sin \theta + (x_{CM}W - x_{CF}B) \cos \theta \cos \phi \\ (x_{CM}W - x_{CF}B) \cos \theta \sin \phi + (y_{CF}B - y_{CM}W) \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.4.6 Forças e momentos de propulsão

Para permitir o movimento controlado de veículos marítimos, é frequente o recurso a propulsores. Nesta subsecção, consideram-se propulsores constituídos por um motor, uma hélice e um ducto como ilustra a figura 2.4.



Figura 2.4 – Propulsor do AUV MARES (Seabotix, 2009).

A força gerada por um propulsor acoplado a um corpo que se move com velocidade v com uma hélice de diâmetro D , a girar a uma velocidade n (rpm) é dada por (Kim, 2009):

$$T = \rho_f D^4 n^2 \left[c_1 \left(\frac{v_a}{Dn} \right)^2 + c_2 \left(\frac{v_a}{Dn} \right) + c_3 \right], \quad (2.45)$$

em que ρ_f é a densidade de massa do fluido, c_1 , c_2 , c_3 são constantes e v_a a velocidade de avanço tal que

$$v_a = (1 - w)v_r, \quad (2.46)$$

sendo w é uma constante, conhecida por “wake fraction”, que pode ser determinada experimentalmente.

Considerando $J_o = \frac{v_a}{Dn}$ o quociente de avanço, uma representação alternativa para a força gerada pelo propulsor é dada por:

$$T = \rho_f D^4 n^2 K_T(J_o), \quad (2.47)$$

onde

$$K_T(J_o) = \frac{T}{\rho_f D^4 n^2} = \left[c_1 \left(\frac{v_a}{Dn} \right)^2 + c_2 \left(\frac{v_a}{Dn} \right) + c_3 \right]. \quad (2.48)$$

Como se pode verificar pelas expressões (2.45) e (2.46), o vector de forças e momentos exercidos (τ_P) por um propulsor sobre o corpo ao qual está associado é dependente da velocidade do corpo (v_r) e da velocidade de rotação do propulsor (n), pelo que se pode escrever, genericamente:

$$\tau_P = B(v_r, n)n|n|. \quad (2.49)$$

2.5 Forças e momentos resultantes

Nas secções anteriores identificaram-se as diversas forças que actuam num veículo inserido num fluido, pelo que se está agora em condições de apresentar a expressão da dinâmica do veículo:

$$\tau_{ext} = \tau_A(\dot{v}_r, v_r) + \tau_{FK}(\dot{v}_f) + \tau_B(v_r) + \tau_V(v_r) + \tau_C(\eta) + \tau_P(v_r, n). \quad (2.50)$$

Substituindo em (2.50) as forças pelas suas expressões e manipulando a equação, obtém-se facilmente:

$$(M_{RB} + M_A)\dot{v}_r = M_{FK} \dot{v}_f - (C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_B + D_V(v_r))v_r - g(\eta) + \tau_P \quad (2.51)$$

2.6 Teoria fundamental de Lyapunov

Como se pode verificar pela secção anterior, a dinâmica do sistema é não linear. Neste contexto, os métodos de controlo lineares são pouco robustos. A aplicação de um controlador linear a um sistema não linear implica a linearização deste último numa gama mais ou menos estreita de funcionamento (Gomes, 2002), (Presterio, 2001), (Fossen, 1994). Fora desta gama, o controlo pode tornar-se inadequado ou até mesmo levar o sistema à instabilidade (Slotine, et al., 1991). Por estes motivos, o uso de métodos de controlo não lineares torna-se uma alternativa fundamentada para dinâmicas não lineares como a da expressão (2.51).

O famoso matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, propõe um conjunto de teoremas que permitem analisar a estabilidade de um sistema. Baseadas nestes métodos, várias técnicas foram desenvolvidas para o projecto de controladores não lineares entre as quais se destacam a técnica de *Backstepping*². Nesta secção, apresentar-se-ão os conceitos fundamentais da teoria de Lyapunov, assim como teoremas que serão úteis no capítulo 5. Seguir-se-á de perto (Slotine, et al., 1991), onde se pode encontrar uma descrição mais exhaustiva desta teoria.

² Esta técnica será apresentada na secção 2.7

2.6.1 Sistemas não lineares e pontos de equilíbrio

Considera-se um sistema não linear de primeira ordem como se mostra na equação a seguir

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.52)$$

em que $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ é o vector de estado do sistema, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ é a sua primeira derivada em ordem ao tempo, $t \in \mathbb{R}$ é a variável de tempo, $f \in \mathbb{R}^n$ é o vector da função não linear do sistema, sendo n a ordem do sistema.

Note-se que a equação diferencial da dinâmica dada em (2.51) é de segunda ordem, no entanto, para a apresentação dos conceitos da teoria de Lyapunov, considera-se um sistema de primeira ordem, de forma a simplificar a aproximação. Os conceitos aqui apresentados estendem-se facilmente para equações diferenciais de ordem mais elevada.

Definição: “Um sistema é dito autónomo se não depende explicitamente do tempo, isto é

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = f(x), \quad (2.53)$$

noutros casos, o sistema é dito não autónomo” (Slotine, et al., 1991).

A seguir, transcreve-se a definição de ponto, ou estado, de equilíbrio.

Definição: “Um estado x^* é um estado de equilíbrio (ou ponto de equilíbrio) do sistema se, dado $x(t)$ igual a x^* , este permanece igual a x^* em todos os instantes futuros” (Slotine, et al., 1991).

Esta definição traduz-se matematicamente como se mostra a seguir

$$\dot{x} = f(x^*, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.54)$$

ou seja, a primeira derivada, em ordem ao tempo, do estado do sistema é nula, pelo que este permanece no ponto x^* para todos os instantes futuros.

2.6.2 Estabilidade

A estabilidade é um conceito fundamental nas questões de controlo. Apresenta-se a sua definição a seguir.

Definição: “O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito estável se, para qualquer $R > 0$, existe um $r > 0$, tal que, se $\|x(0)\| \leq r$, $x(t) \leq R$ para todo o $t \geq 0$. De outro modo, o ponto de equilíbrio é dito instável” (Slotine, et al., 1991).

Neste caso, $\|\cdot\|$ representa a norma euclideana de um vector.

Por outras palavras, a estabilidade de um sistema implica que, para um estado inicial $x(0)$ suficientemente próximo da origem (ponto de equilíbrio), pertencente à bola centrada na origem com raio r , B_r , o sistema permaneça numa bola B_R centrada na origem maior ou igual a B_r .

Em muitos problemas de controlo, pretende-se que o estado do sistema tenda para um valor, não sendo suficiente a condição de estabilidade. Assim, define-se a estabilidade assintótica.

Definição: “Um ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se for estável, e se, adicionalmente, existe um $r > 0$ tal que $\|x(0)\| \leq r$ que implica que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ ” (Slotine, et al., 1991).

Por exemplo, nos problemas de controlo clássicos, possui-se um erro proveniente da diferença entre o estado e a referência imposta que se pretende fazer convergir o erro assintoticamente para zero e não para uma vizinhança de zero.

A figura 2.5 ilustra os conceitos de estabilidade marginal e estabilidade assintótica. $x(0)$

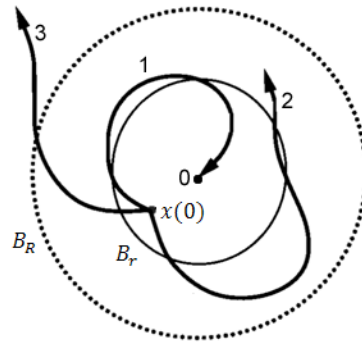


Figura 2.5 – Conceitos de estabilidade. Trajectória 1 assintoticamente estável; trajectória 2 marginalmente estável; trajectória 3 instável. Baseada em (Slotine, et al., 1991).

Existem sistemas que, para qualquer condição inicial $x(0)$, tendem para o ponto de equilíbrio o que leva à definição de estabilidade assintótica global.

Definição: “Se a estabilidade assintótica se mantém para qualquer estado inicial $x(0)$, o ponto de equilíbrio é dito estável assintoticamente globalmente” (Slotine, et al., 1991).

2.6.3 Método directo de Lyapunov

O método aqui apresentado é usado para a análise do comportamento de um sistema. O fundamento deste método baseia-se na energia. Se a energia total de um sistema físico é constantemente dissipada ao longo do seu funcionamento ou do seu movimento, este acabará por estabilizar num ponto (estado) de equilíbrio. Para ilustrar este conceito, considere-se um pêndulo que oscila com uma energia potencial inicial maior que zero. Assumindo que existe fricção ao longo devido à sua oscilação, a amplitude do seu movimento irá diminuir gradualmente até parar no ponto em que a força resultante é nula (no ponto em que a energia potencial é menor).

Antes de prosseguir com a definição da função de Lyapunov, define-se o conceito de função positiva/negativa definida.

Definição: Uma função qualquer $f(x)$ é dita localmente positiva definida se $f(0) = 0$ e, para todo o x pertencente à bola centrada na origem com raio B_{R0} ,

$$f(x) > 0, \quad x \neq 0.$$

Se esta condição se verificar para todo o x , a função $f(x)$ é dita globalmente positiva definida.

Uma função $f(x)$ é dita localmente negativa definida se $f(0) = 0$ e, para todo o x pertencente à bola centrada na origem com raio B_{R0} ,

$$f(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

Se esta última condição se verificar para todo o x , a função $f(x)$ é dita globalmente negativa definida.

Se, para o caso da função positiva definida, a condição atrás for substituída por

$$f(x) \geq 0, \quad x \neq 0,$$

então diz-se a função $f(x)$ é positiva semi-definida. Os restantes conceitos são obtidos facilmente por analogia.

Em muitos casos, a função de Lyapunov tem como objectivo traduzir o comportamento da variação de energia de um sistema físico. Como foi ilustrado anteriormente para o caso do pêndulo, esta permite tirar conclusões quanto à estabilidade de um sistema. Porém, para muitos sistemas físicos, é extremamente difícil obter uma expressão analítica da energia em função do tempo ou do movimento. Define-se a seguir o conceito de função de Lyapunov.

Definição: “Se, numa bola B_{R0} , a função $V(x)$ é positiva definida e possui derivadas parciais contínuas, e se a sua derivada em ordem ao tempo ao longo de qualquer trajectória do estado de um sistema tal que $\dot{x} = f(x)$ for negativa semi-definida, i.e.,

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

então $V(x)$ é dita função de Lyapunov para o sistema referido” (Slotine, et al., 1991).

Estando estes conceitos definidos, existem agora condições para apresentar o teorema de Lyapunov para a estabilidade local.

Teorema: “Se, numa bola B_{R_0} , existe uma função escalar $V(x)$ com primeiras derivadas parciais contínuas tal que

- $V(x)$ é positiva definida (localmente em B_{R_0})
- $\dot{V}(x)$ é negativa semi-definida (localmente em B_{R_0})

então o ponto de equilíbrio 0 é estável. Se, eventualmente, a derivada $\dot{V}(x)$ for negativa definida localmente em B_{R_0} , então a estabilidade é assintótica” (Slotine, et al., 1991).

A demonstração deste teorema pode ser consultada em (Slotine, et al., 1991).

Embora importante, este teorema pode não ser suficiente em alguns casos, necessitando de estabilidade global, isto é, para todo o espaço de estado x . O teorema de estabilidade global não é directamente deduzível do teorema anterior. É necessário acrescentar a condição de crescimento de $V(x)$ com o crescimento de x , isto é, $V(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$.

Teorema: “Assuma-se que existe uma função escalar V do estado x , com derivadas de primeira ordem contínuas, tal que

- $V(x)$ é positiva definida
- $\dot{V}(x)$ é negativa definida
- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$

então o ponto de equilíbrio na origem é globalmente assintoticamente estável” (Slotine, et al., 1991).

Na figura a seguir, ilustra-se o conceito de função de Lyapunov com um gráfico típico de $V(x)$.

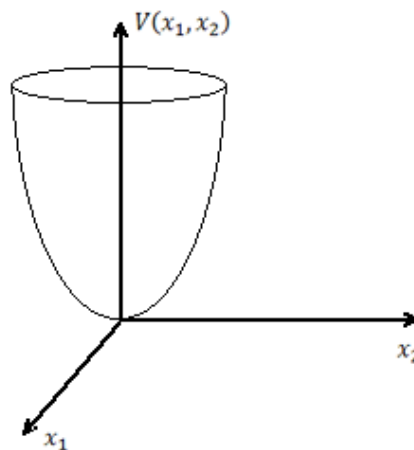


Figura 2.6 – Função de Lyapunov típica. Baseada em (Slotine, et al., 1991).

2.7 Técnica de *Backstepping*

A teoria de Lyapunov permite analisar a estabilidade de um sistema. No entanto, não propõe nenhum método para o desenvolvimento de uma lei de controlo. É neste contexto que surge a técnica de *Backstepping*. Estas permitem obter uma lei de controlo baseada na dinâmica do

sistema, através de um método recursivo. O uso desta técnica implica o conhecimento da função de Lyapunov do sistema $V(x)$.

Considere-se o seguinte sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (2.55)$$

$$\dot{\xi} = f_a(x, \xi) + g_a(x, \xi)u, \quad (2.56)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vector de estado do sistema, $f \in \mathbb{R}^n$ é o vector de uma função, $g \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de uma função, $\xi \in \mathbb{R}^m$ é um vector, $f_a \in \mathbb{R}^m$ é o vector de uma função, $g_a \in \mathbb{R}^{m \times l}$ é a matriz de uma função e $u \in \mathbb{R}^l$ é o vector de entrada do sistema. Considera-se que todas as funções acima são “suficientemente suaves”, isto é, as suas derivadas de primeira ordem são finitas.

Suponha-se que se conhece uma lei de controlo $\phi(x)$ tal que $\xi = \phi(x)$ e que a expressão resultante de (2.55),

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x), \quad (2.57)$$

seja assintoticamente estável em $x = 0$. Para tal, a derivada em ordem ao tempo da função de Lyapunov deve obedecer à seguinte condição (pelo teorema de estabilidade de Lyapunov):

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -W(x), \quad (2.58)$$

em que $W(x)$ é uma função escalar positiva definida. Desta última expressão resulta

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} &\leq -W(x) \\ \Downarrow \\ \frac{dV(x)}{dx} [f(x) + g(x)\phi(x)] &\leq -W(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Dado que, em alguns casos, não é possível variar o valor de ξ instantaneamente, define-se uma nova variável de erro:

$$\alpha = \xi - \phi. \quad (2.60)$$

O sistema dado pelas expressões (2.55) e (2.56) resulta

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha - g(x)\phi \quad (2.61)$$

$$\dot{\alpha} = f_a(x, \xi) + g_a(x, \xi)u - \dot{\phi}. \quad (2.62)$$

em que

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\phi}{dx} [f(x) + g(x)\xi]. \quad (2.63)$$

Considere-se a seguinte função

$$V_1 = V + \frac{1}{2} \alpha^T \alpha \quad (2.64)$$

como função candidata de Lyapunov. Pode-se verificar que esta função é positiva definida. A sua derivada é dada por

$$\dot{V}_1 = \dot{V} + \alpha^T \dot{\alpha}. \quad (2.65)$$

Usando esta última expressão e a inequação (2.58), resulta facilmente

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{dV}{dx} [f + g\phi] + \frac{dV}{dx} g\alpha + \alpha^T [f_a + g_a u - \dot{\phi}] \\ &\leq -W(x) + \frac{dV}{dx} g\alpha + \alpha^T [f_a + g_a u - \dot{\phi}]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Assumindo que g_a é não-singular, se se escolher a variável de entrada tal que

$$u = g_a^{-1} \left[\dot{\phi} - f_a - \frac{dV}{dx} g - k\alpha \right], \quad (2.67)$$

com $k \in \mathbb{R}$ estritamente positivo, resulta

$$\dot{V}_1 \leq -W(x) - k\alpha^T \alpha. \quad (2.68)$$

Pela análise desta expressão pode-se deduzir que \dot{V}_1 é negativa definida. Substituindo em (2.67) $\dot{\phi}$ e α pelas suas expressões em (2.63) e (2.60), resulta a lei de controlo

$$u = g_a^{-1} \left[\frac{d\phi}{dx} [f + g\xi] - f_a - \frac{dV}{dx} g - k[\xi - \phi] \right]. \quad (2.69)$$

Esta técnica pode ser facilmente estendida para outros sistemas, como o que se mostra a seguir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)z_1 \\ z_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\ &\vdots \\ z_n &= f_n(x, z_1, \dots, z_n) + g_n(x, z_1, \dots, z_n)u, \end{aligned} \quad (2.70)$$

aplicando recursivamente a técnica de *Backstepping* para a obtenção das expressões das variáveis z_i e de u .

Capítulo 3

Modelação

Neste capítulo, apresenta-se o processo de modelação de um veículo submarino. Para tal, começa-se por deduzir um modelo geométrico, atendendo a todas as suas características. Isto permitirá determinar o modelo do corpo rígido assim como as expressões das várias forças, obtendo, por fim, a expressão geral da dinâmica para os seis graus de liberdade.

3.1 Veículo submarino autónomo MARES

O MARES (Cruz, et al., 2008) ou *Modular Autonomous Robot for Environment Sampling* é um veículo submarino autónomo desenvolvido pelo *Ocean Systems Group* na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP). A área principal de aplicação do MARES (figura 3.1) é a monitorização ambiental, que é realizada pela recolha de dados relativos ao meio. Contrariamente à maioria dos pequenos AUVs, o MARES pode deslocar-se com movimento apenas vertical, estando dotado de dois propulsores inseridos no invólucro que lhe permitem este grau de liberdade. Para além desta característica, tal como o nome indica, este veículo é modular, pelo que existe a possibilidade de obter vários tipos de configuração, mas neste trabalho assume-se apenas uma.



Figura 3.1 – Veículo autónomo MARES.

3.1.1 Características

As figuras 3.2, 3.3 e 3.4 mostram o AUV MARES nas perspectivas superior, lateral e frontal, respectivamente. Apresentam-se as suas dimensões na tabela seguinte

Tabela 3.1 – Dimensões do AUV MARES.

Parâmetro	Valor [m]	Descrição
l	$1.41 \cdot 10^0$	Comprimento invólucro
d	$2.00 \cdot 10^{-1}$	Diâmetro cilindro
d_f	$1.00 \cdot 10^{-1}$	Diâmetro furos verticais
d_m	$4.40 \cdot 10^{-2}$	Diâmetro invólucro motores propulsores
d_d	$1.00 \cdot 10^{-1}$	Diâmetro ducto propulsores

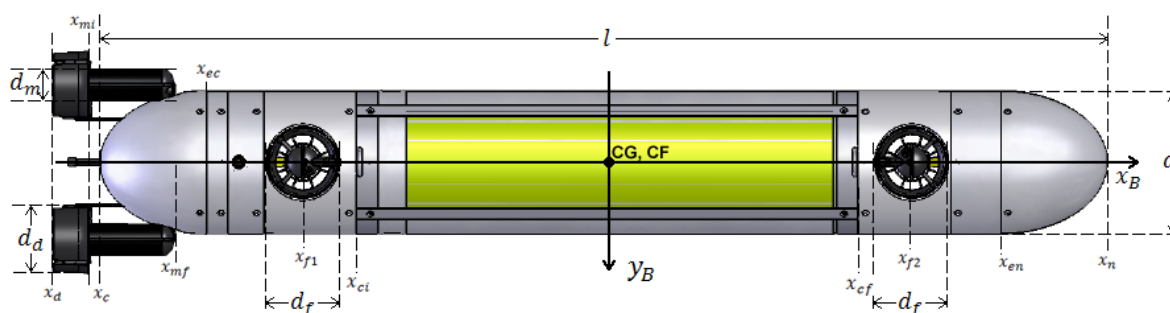


Figura 3.2 – Projecção superior do MARES.

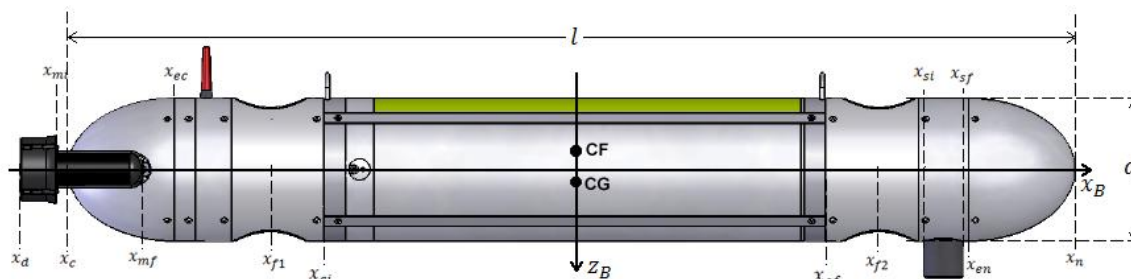


Figura 3.3 – Projecção lateral do MARES.

O efeito da antena e das aças situadas na parte superior do veículo (ver figuras 3.3 e 3.4) será desprezado na análise da dinâmica do corpo inserido no fluido, dadas as suas pequenas dimensões.

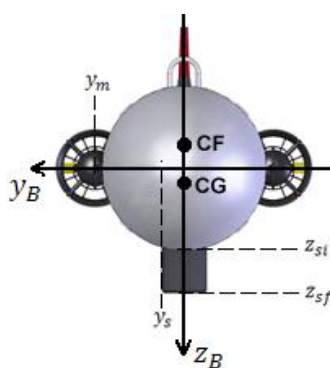


Figura 3.4 – Projecção frontal do MARES.

Na tabela 3.2, apresentam-se os valores das coordenadas indicadas nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4.

Tabela 3.2 – Coordenadas do MARES.

Parâmetro	Valor [m]	Descrição
x_d	$-7.72 \cdot 10^{-1}$	Início do ducto
x_{mi}	$-7.22 \cdot 10^{-1}$	Início do motor do propulsor
x_{mf}	$-6.02 \cdot 10^{-1}$	Fim do motor do propulsor
x_c	$-7.06 \cdot 10^{-1}$	Cauda do invólucro
x_{ec}	$-5.56 \cdot 10^{-1}$	Fim da parte elipsoidal da cauda
x_{f1}	$-4.21 \cdot 10^{-1}$	Centro do furo vertical traseira
x_{ci}	$-3.51 \cdot 10^{-1}$	Início da parte estanque do invólucro
x_{cf}	$3.74 \cdot 10^{-1}$	Fim da parte estanque do invólucro
x_{f2}	$4.34 \cdot 10^{-1}$	Centro do furo vertical frente
x_{si}	$4.94 \cdot 10^{-1}$	Início do sonar
x_{sf}	$5.49 \cdot 10^{-1}$	Fim do sonar
x_{en}	$5.59 \cdot 10^{-1}$	Início da elipsóide do nariz
x_n	$7.09 \cdot 10^{-1}$	Nariz do invólucro
y_s	$2.75 \cdot 10^{-2}$	Início transversal largura sonar
y_m	$1.09 \cdot 10^{-1}$	Centro do motor do propulsor
z_{si}	$1.00 \cdot 10^{-1}$	Início vertical do sonar
z_{sf}	$1.55 \cdot 10^{-1}$	Fim vertical do sonar

Como se pode verificar pelas figuras 3.2 e 3.4, o veículo é simétrico relativamente ao plano formado pelos eixos $\{x_B, z_B\}$. Tal propriedade permitirá algumas simplificações nas expressões da hidrodinâmica deduzidas na secção 2.4.

Na tabela 3.3, apresentam-se as posições do centro de gravidade (CG) e do centro de flutuação (CF). A inserção/remoção de dispositivos no interior ou no exterior do veículo pode alterar estes valores. No entanto, assume-se que permanecem iguais ao longo deste trabalho.

Tabela 3.3 – Posição dos centros de gravidade e de flutuação em relação ao centro geométrico.

Parâmetro	Valor [m]	Descrição
(x_{CG}, y_{CG}, z_{CG})	(0,0, 3.20e-3)	Posição centro de gravidade
(x_{CF}, y_{CF}, z_{CF})	(0,0, -1.20e-3)	Posição centro de flutuação

No decorrer deste trabalho as dimensões permaneceram iguais às indicadas nas tabelas 3.1 e 3.2 embora a modularidade do veículo permita obter dimensões diferentes. As posições dos centros de massa e de flutuação também são afectados pela inserção/remoção de dispositivos no interior ou exterior do veículo, assim como os valores do seu peso (W) e da força de flutuação (B). Para além deste facto, a aceleração da gravidade varia com o local, com a altitude e com a posição da Lua relativamente à Terra. Considerando que estes efeitos são desprezáveis e que a massa do veículo não sofre alterações ao longo do trabalho, assumem-se os seguintes valores para a aceleração da gravidade e para a massa

Tabela 3.4 – Massa e aceleração da gravidade.

Parâmetro	Valor	Unidades	Descrição
m	$3.20 \cdot 10^1$	kg	Massa do veículo
g	$9.8 \cdot 10^0$	m/s^2	Aceleração da gravidade

O peso e a força de flutuação são dados na tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Peso e força de flutuação

Parâmetro	Valor [N]	Descrição
W	$3.14 \cdot 10^2$	Peso
B	$3.16 \cdot 10^2$	Força de flutuação

3.2 Modelo geométrico

Para efeitos de cálculo, o AUV Mares pode ser aproximado pela junção de várias figuras geométricas tridimensionais como se pode verificar pelas figuras 3.2-3.4. Considera-se que, para $x_c < x_B < x_{ec}$ e $x_{en} < x_B < x_n$, o veículo é constituído por duas metades de uma elipsóide. Para $x_{ec} < x_B < x_{f1}$, aproxima-se o invólucro por um cilindro com dois furos circulares nas posições x_{f1} e x_{f2} . Em $x_{si} < x_B < x_{sf}$, na parte inferior do corpo, encontra-se um invólucro de forma cilíndrica (sonar). Aproximam-se os propulsores do AUV Mares situados na traseira por um cilindro no intervalo $x_{mf} < x_B < x_{mi}$ e um cilindro oco na posição $x_d < x_B < x_{mi}$. Assume-se que os furos onde estão colocados os propulsores estão vazios.

3.2.1 Projectção inferior

Define-se a função $R_{xy}(x_B)$ como o raio da área projectada no plano $\{x_B, y_B\}$ (ver figura 3.2). Esta função determina apenas o raio de áreas não vazias. Assim, áreas vazias, tais como a dos furos e da região entre os propulsores, são subtraídas. Desta forma, resulta

$$R_{xy}(x_B) = \begin{cases} \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_B - x_{ec}}{r_e}\right)^2} & , \quad x_c \leq x_B < x_{ec} \\ \frac{d}{2} & , \quad x_{ec} \leq x_B < x_{f1} - \frac{d_f}{2} \\ \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_f}{2}\right)^2 - (x_B - x_{f1})^2} & , \quad x_{f1} - \frac{d_f}{2} \leq x_B < x_{f1} + \frac{d_f}{2} \\ \frac{d}{2} & , \quad x_{f1} + \frac{d_f}{2} \leq x_B < x_{f2} - \frac{d_f}{2} \\ \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_f}{2}\right)^2 - (x_B - x_{f2})^2} & , \quad x_{f2} - \frac{d_f}{2} \leq x_B < x_{f2} + \frac{d_f}{2} \\ \frac{d}{2} & , \quad x_{f2} + \frac{d_f}{2} \leq x_B < x_{en} \\ \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_B - x_{en}}{r_e}\right)^2} & , \quad x_{en} \leq x_B \leq x_n \end{cases} \quad (3.1)$$

em que r_e é o raio maior da elipsóide, tal que $r_e = x_{ec} - x_c = x_n - x_{en}$.

O raio dos propulsores horizontais (traseira), na posição x_B , é dado por

$$R_{Pxy}(x_B) = \begin{cases} d_d & , \quad x_d \leq x_B < x_{mi} \\ d_m & , \quad x_{mi} \leq x_B < x_{mf} \end{cases} \quad (3.2)$$

O raio dos propulsores verticais, em função da posição x_B , desprezando as hélices e o ducto, é dado por

$$R_{pv\ xy}(x_B) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (x_B - x_{f1})^2} & , \quad x_{f1} - \frac{d}{2} \leq x_B < x_{f1} + \frac{d}{2} \\ \sqrt{\frac{d_m}{2} - (x_B - x_{f2})^2} & , \quad x_{f2} - \frac{d}{2} \leq x_B < x_{f2} + \frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.2 Projecção lateral

Procedendo da mesma forma que para a projecção inferior, define-se $R_{xz}(x_B)$ como o raio da área projectada no plano $x_B z_B$ (ver figura 3.3). As concavidades, devidas aos furos verticais nas posições x_{f1} e x_{f2} nesta projecção, são desprezadas. Assim, considera-se que o veículo é cilíndrico no intervalo $[x_{ec}, x_{en}]$. Recorda-se que as assimetrias resultantes da antena e das alças na parte superior e do invólucro do sonar na parte inferior não são consideradas na definição de $R_{xz}(x_B)$.

$$R_{xz}(x_B) = \begin{cases} \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_B - x_{ec}}{r_e}\right)^2} & , \quad x_c \leq x_B < x_{ec} \\ \frac{d}{2} & , \quad x_{ec} \leq x_B < x_{en} \\ \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_B - x_{en}}{r_e}\right)^2} & , \quad x_{en} \leq x_B < x_n \end{cases} \quad (3.4)$$

Define-se o raio dos propulsores situados na traseira:

$$R_{pxz}(x_B) = \begin{cases} \frac{d_d}{2} & , \quad x_d \leq x_B < x_{mi} \\ \frac{d_m}{2} & , \quad x_{mi} \leq x_B < x_c \end{cases} \quad (3.5)$$

A altura do invólucro do sonar projectada no plano $x_B z_B$ é dada pela expressão (3.6). Assume-se que o diâmetro do invólucro é suficientemente pequeno de forma a poder considerar-se que a altura é constante.

$$H_S(x_B) = z_{Sf} - z_{Si} \quad , \quad x_{Si} \leq x_B < x_{Sf}. \quad (3.6)$$

3.2.3 Projecção frontal

Seja $R_{yz}(z_B)$ o raio da projecção do veículo no plano $\{y_B, z_B\}$, na ausência dos propulsores e do invólucro do sonar, dado pela expressão (3.7).

$$R_{yz}(z_B) = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - z_B^2}. \quad (3.7)$$

Na expressão (3.8), apresenta-se a expressão o raio da projecção dos propulsores no plano $\{y_B, z_B\}$ em função de y_B .

$$R_{pyz}(y_B) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (y_B + y_m)^2}, & -y_m - \frac{d_m}{2} \leq y_B < -y_m + \frac{d_m}{2} \\ \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (y_B - y_m)^2}, & y_m - \frac{d_m}{2} \leq y_B < y_m + \frac{d_m}{2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

A projecção do invólucro do sonar no plano $\{y_B, z_B\}$, permite determinar a sua largura como uma função de z_B , como se expõe na expressão (3.9). Considera-se que o diâmetro do invólucro é suficientemente pequeno de tal modo que a sua altura é constante.

$$L_S(z_B) = 2y_s, \quad z_{Si} \leq z_B \leq z_{Sf}. \quad (3.9)$$

3.3 Modelo do corpo rígido

A matriz de inércia do corpo rígido e a matriz dos termos de Coriolis e centrípetos dependem de termos constantes tais como a massa do corpo e os momentos de inércia. Nesta secção, determinam-se os valores dos mesmos.

3.3.1 Densidade do veículo

Com o objectivo de calcular a densidade do veículo, é necessário determinar o seu volume, que é dado por

$$V = \int_V dV, \quad (3.10)$$

ou, em coordenadas cilíndricas com $dV = r dr d\phi dx$,

$$V = \int_L \int_0^{2\pi} \int_0^{R(x_B)} r dr d\phi dx_B, \quad (3.11)$$

em que $R(x_B)$ é o raio do veículo na posição em função de x_B .

Considera-se que o invólucro cilíndrico do AUV MARES ($[x_{ec}; x_{en}]$) possui uma densidade heterogénea. Quando submerso, a restantes partes estão preenchidas por água, excepto os

propulsores. Calculam-se os volumes da parte estanque, das partes permeáveis, e dos propulsores, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 V_{est} &= \int_{x_{ci}}^{x_{cf}} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{xz}(x_B)} r dr d\phi dx \\
 V_{perm} &= \int_{x_c}^{x_{ci}} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{xz}(x_B)} r dr d\phi dx + \int_{x_{ci}}^{x_n} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{xz}(x_B)} r dr d\phi dx \\
 V_p &= \int_{x_{mi}}^{x_{mf}} \int_{d/2}^{d/2+d_m} 2R_{pyz}(y_B) dy_B dx_B .
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Resolvendo as expressões acima, obtêm-se os seguintes valores:

Tabela 3.6 – Volumes das diversas partes do MARES.

Parâmetro	Valor [m^3]	Descrição
V_{est}	$2.36 \cdot 10^{-2}$	Volume estanque
V_{perm}	$1.79 \cdot 10^{-2}$	Volume permeável do veículo
V_p	$1.82 \cdot 10^{-4}$	Volume de um propulsor

Assume-se que as densidades das diferentes partes definidas acima são homogêneas, pelo que se pode usar a seguinte expressão para determinar as mesmas:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [kg/m^3]. \tag{3.13}$$

em que m é a massa e V o volume.

Considera-se que a massa do invólucro das partes permeáveis é desprezável e que a massa do AUV MARES, no ar, sem os propulsores é $m_{est} = 3.06 \cdot 10^1 kg$. Cada propulsor possui uma massa $m_p = 7 \cdot 10^{-1} kg$. Dado que, quando o veículo está submerso, as partes permeáveis estão preenchidas por águas, aproxima-se a densidade das mesmas pela densidade da água. Assim, usando a expressão (3.13), obtêm-se os seguintes valores de densidade:

Tabela 3.7 – Densidades das diferentes partes do MARES.

Parâmetro	Valor [kg/m^3]	Descrição
ρ_{est}	$1.36 \cdot 10^3$	Densidade do volume estanque
ρ_{perm}	$1.03 \cdot 10^3$	Densidade do volume permeável
ρ_p	$3.84 \cdot 10^3$	Densidade do volume do propulsor

Para simplificação de notação, define-se a densidade do veículo sem os propulsores em função da posição x_B :

$$\rho(x_B) = \begin{cases} \rho_{perm} , & x_c \leq x_B < x_{ci} \\ \rho_{est} , & x_{ci} \leq x_B < x_{cf} \\ \rho_{perm} , & x_{cf} \leq x_B < x_n \end{cases} \tag{3.14}$$

3.3.2 Momentos de inércia

Recordam-se as expressões dos momentos de inércia, dadas por

$$I_{xx} = \int_V \rho_B (y^2 + z^2) dV ; \quad I_{yy} = \int_V \rho_B (x^2 + z^2) dV ; \quad I_{zz} = \int_V \rho_B (x^2 + y^2) dV. \quad (3.15)$$

Despreza-se o efeito dos propulsores verticais, obtendo-se:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{-d/2}^{d/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{yz}(z_B)} \rho_t (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi dz_B \\ &\quad + 2 \int_{x_{mi}}^{x_{mf}} \int_{d/2}^{d/2+d_m} \rho_p \left(y^2 + 2 \left(R_{pyz}(y_B) \right)^2 \right) dy_B dx_B \\ I_{yy} &= \int_{x_c}^{x_n} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{xz}(x_B)} \rho(x_B) (x_B^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi dx_B \\ &\quad + 2 \int_{x_{mi}}^{x_{mf}} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{pxz}(x_B)} \rho_p (x_B^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi dx_B \\ &\quad + \int_{x_c}^{x_n} \int_{L_m} \int_0^{2R_{pvxy}(x_B)} \rho_p (x_B^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi dx_B \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$I_{zz} \approx I_{yy}$$

em que $\rho_t = \frac{1}{L} \int_L \rho(x_B) dx_B$ é o valor médio da densidade do veículo e L_m o comprimento dos motores dos propulsores.

Apresentam-se os resultados da resolução das expressões acima na tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Momentos de inércia.

Parâmetro	Valor [$kg \cdot m^2$]	Descrição
I_{xx}	$1.55 \cdot 10^{-1}$	Momento de inércia segundo o eixo x_B
I_{yy}	$4.73 \cdot 10^0$	Momento de inércia segundo o eixo y_B
I_{zz}	$4.73 \cdot 10^0$	Momento de inércia segundo o eixo z_B

3.4 Modelo das forças e momentos

3.4.1 Massa acrescentada

A simetria do AUV Mares em relação ao plano $\{x_B, z_B\}$ permite a simplificação da matriz de massa acrescentada M_A , anulando alguns dos seus termos. Por exemplo, a aceleração do veículo segundo y_B não terá influência no movimento segundo x_B . Assim, o termo $X_{\dot{y}}$ da matriz M_A será nulo. A assimetria relativamente ao plano $\{y_B, z_B\}$, implica que os termos $Y_{\dot{r}}, Z_{\dot{q}}, M_{\dot{w}}$ e $N_{\dot{v}}$ sejam não nulos. Por exemplo, a aceleração do veículo segundo y_B provoca um momento segundo yaw, o que implica que o termo $N_{\dot{y}}$ seja não nulo. Por outro lado, a assimetria relativamente ao plano $\{x_B, y_B\}$ resulta em termos $X_{\dot{q}}, Y_{\dot{p}}, K_{\dot{v}}, M_{\dot{u}}$ não nulos. Todos os termos da

diagonal principal são negativos, isto é, qualquer aceleração linear ou angular terá uma força oposta ao seu movimento segundo o eixo em que se move. Em (3.17) apresenta-se a matriz de massa acrescentada simplificada.

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\ddot{u}} & 0 & 0 & 0 & X_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & Y_{\ddot{v}} & 0 & Y_{\dot{p}} & 0 & Y_{\dot{r}} \\ 0 & 0 & Z_{\ddot{w}} & 0 & Z_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & K_{\ddot{v}} & 0 & K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ M_{\ddot{u}} & 0 & M_{\ddot{w}} & 0 & M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & N_{\ddot{v}} & 0 & 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A simplificação da matriz de massa acrescentada M_A permite a simplificação, por consequente, da matriz dos termos de Coriolis e centrípetos:

$$C_A(v_r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w_r - Z_{\dot{q}}q_r & Y_{\dot{v}}v_r + Y_{\dot{p}}p_r + Y_{\dot{r}}r_r \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w_r + Z_{\dot{q}}q_r & 0 & -X_{\dot{u}}u_r - X_{\dot{q}}q_r \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v_r - Y_{\dot{p}}p_r - Y_{\dot{r}}r_r & X_{\dot{u}}u_r + X_{\dot{q}}q_r & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w_r - Z_{\dot{q}}q_r & Y_{\dot{v}}v_r + Y_{\dot{p}}p_r + Y_{\dot{r}}r_r & 0 & -Y_{\dot{r}}v_r - N_{\dot{r}}r_r & X_{\dot{q}}u_r + Z_{\dot{q}}w_r + M_{\dot{q}}q_r \\ Z_{\dot{w}}w_r + Z_{\dot{q}}q_r & 0 & -X_{\dot{u}}u_r - X_{\dot{q}}q_r & Y_{\dot{r}}v_r + N_{\dot{r}}r_r & 0 & -Y_{\dot{p}}v_r - K_{\dot{p}}p_r \\ -Y_{\dot{v}}v_r - Y_{\dot{p}}p_r - Y_{\dot{r}}r_r & X_{\dot{u}}u_r + X_{\dot{q}}q_r & 0 & -X_{\dot{q}}u_r - Z_{\dot{q}}w_r - M_{\dot{q}}q_r & Y_{\dot{p}}v_r + K_{\dot{p}}p_r & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Determinação dos coeficientes

Determina-se o valor do termo $X_{\ddot{u}}$ recorrendo à expressão dada em (Fossen, 1994 p. 41). Para tal, é necessário aproximar o veículo por uma elipsóide com raio maior $a = l/2$ e raio menor $b = d/2$. A expressão do termo longitudinal é dada por

$$X_{\ddot{u}} = -\frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} m \quad (3.19)$$

em que m é a massa do veículo e

$$\alpha_0 = \frac{2(1 - e^2)}{e^3} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - e \right] \quad (3.20)$$

sendo e dado pela seguinte expressão

$$e = 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (3.21)$$

Baseado em (Yue, 2005b) e (Presterio, 2001), apresenta-se a massa de fluido deslocada, por unidade de comprimento, pelo invólucro do veículo

$$m_a(x_B) = \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^{R(x_B)} r \, dr \, d\varphi = \rho_f \pi R(x_B)^2 \quad (3.22)$$

em que $R(x_B) = R_{xz}(x_B)$ é o raio do invólucro do veículo em x_B .

Da mesma forma, deduz-se massa de fluido deslocada por um propulsor, por unidade de comprimento,

$$m_{aP}(x_B) = \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^{R_P(x_B)} r \, dr \, d\varphi = \rho_f \pi R_P(x_B)^2 \quad (3.23)$$

em que $R_P(x_B) = \frac{R_{Pxy}(x_B)}{2}$ é o raio dos propulsores em x_B .

Para a massa de fluido deslocado pelo invólucro do sonar, resulta

$$m_{aS}(x_B) = 2\rho_f \int_0^{x_B} H_S \sqrt{y_S^2 - (x_B - x_{cS})^2} \, dx_B \quad (3.24)$$

em que $x_{cS} = \frac{x_{Si} + x_{Sf}}{2}$ é o centro da base do cilindro que constitui o sonar.

O movimento segundo y_B e z_B origina forças e momentos diferentes para acelerações iguais. Isto deve-se à existência dos furos verticais no invólucro. No movimento segundo y_B ou *yaw*, o fluido presente no interior dos furos é transportado com o veículo. Tal comportamento é análogo ao movimento na ausência dos furos. Já para o movimento segundo z_B ou *pitch*, o fluido que atravessa os furos não é acelerado. Isto implica que este fluido não exerce nenhuma força nem momento sobre o veículo.

Aproximam-se os furos por cilindros com diâmetro d_f e altura constante $h_f = d$. Esta aproximação é realizada considerando que d_f é suficiente pequeno, assumindo consequentemente que a altura é constante. Assim, define-se $m_{af}(x_B)$ como a massa acrescentada por unidade de comprimento devida aos furos, como se apresenta a seguir:

$$m_{af}(x_B) = \begin{cases} \rho_f h_f \sqrt{\left(\frac{d_f}{2}\right)^2 - (x_B - x_{f1})^2} & , \quad x_{f1} - \frac{d_f}{2} \leq x_B < x_{f1} + \frac{d_f}{2} \\ \rho_f h_f \sqrt{\left(\frac{d_f}{2}\right)^2 - (x_B - x_{f2})^2} & , \quad x_{f2} - \frac{d_f}{2} \leq x_B < x_{f2} + \frac{d_f}{2} \end{cases} \quad (3.25)$$

Considerando a assimetria relativamente ao plano $\{x_B, y_B\}$ devida à presença do invólucro do sonar na parte inferior do veículo, a aceleração segundo x_B induz um momento segundo *pitch*. Isto traduz-se matematicamente com o termo $M_{\dot{u}}$. A simetria da matriz M_A implica que o termo $X_{\dot{q}}$ também seja não nulo.

Despreza-se a fricção no invólucro do veículo aquando da aceleração angular segundo *roll*. Estes factos permitem deduzir que o termo $K_{\dot{p}}$ depende apenas dos invólucros do sonar e dos

propulsores. Definem-se assim as massas deslocadas por estes invólucros na rotação segundo *roll* como se mostra a seguir

$$m_{aS}(z_B) = \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^{y_s} r \, dr \, d\varphi = \rho_f \pi y_s^2 \quad (3.26)$$

$$m_{aP1}(y_B) = 2 \rho_f \int_{L_m} \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (y + y_m)^2} dx = 2L_m \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (y + y_m)^2} \quad (3.27)$$

$$m_{aP2}(y_B) = 2 \rho_f \int_{L_m} \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (y - y_m)^2} dx = 2L_m \sqrt{\left(\frac{d_m}{2}\right)^2 - (y - y_m)^2} \quad (3.28)$$

em que $L_m = x_{mf} - x_{mi}$ é o comprimento dos motores dos propulsores.

A seguir, apresentam-se as expressões para a determinação dos termos de massa acrescentada

$$\begin{aligned} Y_{\dot{v}} &= - \int_{x_c}^{x_n} m_a(x_B) dx_B - 2 \int_{x_d}^{x_{mf}} m_{aP}(x_B) dx_B - \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} m_{aS}(x_B) dx_B \\ Z_{\dot{w}} &= - \int_{x_c}^{x_n} m_a(x_B) dx_B - 2 \int_{x_d}^{x_{mf}} m_{aP}(x_B) dx_B - \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} m_{aS}(x_B) dx_B + \int_{x_c}^{x_n} m_{af}(x_B) dx_B \\ K_{\dot{p}} &= - \int_{z_{Si}}^{z_{Sf}} z_B^2 m_{aS}(z_B) dz_B - \int_{-y_m - \frac{d_m}{2}}^{-d} y_B^2 m_{aP2}(y_B) dy_B - \int_d^{y_m + \frac{d_m}{2}} y_B^2 m_{aP2}(y_B) dy_B \\ &= - \int_{x_c}^{x_n} x_B^2 m_a(x_B) dx_B - 2 \int_{x_d}^{x_{mf}} x_B^2 m_{aP}(x_B) dx_B - \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} x_B^2 m_{aS}(x_B) dx_B \\ M_{\dot{q}} &\quad + \int_{x_c}^{x_n} x_B^2 m_{af}(x_B) dx_B \\ N_{\dot{r}} &= - \int_{x_c}^{x_n} x_B^2 m_a(x_B) dx_B - 2 \int_{x_d}^{x_{mf}} x_B^2 m_{aP}(x_B) dx_B - \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} x_B^2 m_{aS}(x_B) dx_B \\ X_{\dot{q}} &= - \int_{z_{Si}}^{z_{Sf}} z_B m_{aS}(z_B) dz_B \\ M_{\dot{u}} &= -Y_{\dot{p}} = -K_{\dot{v}} = X_{\dot{q}} \\ Y_{\dot{r}} &= \int_{x_c}^{x_n} x_B m_a(x_B) dx_B + 2 \int_{x_d}^{x_{mf}} x_B m_{aP}(x_B) dx_B + \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} x_B m_{aS}(x_B) dx_B \\ Z_{\dot{q}} &= - \int_{x_c}^{x_n} x_B m_a(x_B) dx_B - 2 \int_{x_d}^{x_{mf}} x_B m_{aP}(x_B) dx_B - \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} x_B m_{aS}(x_B) dx_B + \int_{x_c}^{x_n} x_B m_{af}(x_B) dx_B \\ M_{\dot{w}} &= Z_{\dot{q}} \\ N_{\dot{v}} &= Y_{\dot{r}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Na tabela 3.9, apresentam-se os valores obtidos para os coeficientes de massa acrescentada.

Tabela 3.9 – Coeficientes de massa acrescentada.

Parâmetro	Valor	Unidades
$X_{\dot{u}}$	$-1.74 \cdot 10^0$	kg
$Y_{\dot{v}}$	$-4.28 \cdot 10^1$	kg
$Z_{\dot{w}}$	$-4.12 \cdot 10^1$	kg
$K_{\dot{p}}$	$-8.61 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$
$M_{\dot{q}}$	$-6.07 \cdot 10^0$	$kg \cdot m^2$
$N_{\dot{r}}$	$-6.40 \cdot 10^0$	$kg \cdot m^2$
$X_{\dot{q}}$	$-3.05 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m$
$Y_{\dot{p}}$	$3.05 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m$
$K_{\dot{v}}$	$3.05 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m$
$M_{\dot{u}}$	$-3.05 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m$
$Y_{\dot{r}}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot m$
$Z_{\dot{q}}$	$-1.23 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot m$
$M_{\dot{w}}$	$-1.23 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot m$
$N_{\dot{v}}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot m$

3.4.2 Forças de Froude-Kriloff

Durante operação do MARES em ambiente subaquático, tanto em ambiente fluvial como marítimo, a variação de velocidade do fluido é muito reduzida. Assume-se, portanto que a aceleração do fluido \dot{v}_f é nula, pelo que resulta a força de Froude-Kriloff dada pela expressão (2.33), $\tau_{FK}(\dot{v}_f) = M_{FK} \dot{v}_f = 0$.

3.4.3 Amortecimento de potencial

Tal como foi referido, o amortecimento de potencial é uma força que se opõe ao movimento do veículo. Este é uma função linear da velocidade, em relação ao fluido, a que o veículo se desloca. Porém, os valores das forças, resultantes da decomposição segundo cada eixo, do amortecimento de potencial são reduzidas quando comparadas com as restantes forças dissipativas que actuam no veículo durante o seu movimento (Fossen, 1991). Este facto aplica-se especialmente a veículos submarinos de pequenas dimensões. É frequente inserir a contribuição do amortecimento de potencial no amortecimento viscoso.

3.4.4 Amortecimento viscoso

Como se referiu na secção 2.4.4, o amortecimento viscoso é geralmente aproximado por termos de ordem linear e quadrática (Fossen, 1994). Neste trabalho, desprezar-se-ão os termos de ordem mais elevada, à semelhança de (Presterio, 2001). Os termos lineares também são desprezados, dado que os termos quadráticos são dominantes na maior parte da gama de velocidades consideradas. Os termos cruzados como X_{uq} (força exercida segundo o eixo x_B devido às velocidades u e q) ou Z_{wr} (força exercida segundo o eixo z_B devido às velocidades w e r) serão desprezados.

Tal como acontece com a matriz de massa acrescentada M_A na secção anterior, a simetria do veículo em relação ao plano $\{x_B, z_B\}$, permite simplificar a matriz de amortecimento viscoso. Recordando os conceitos apresentados, a assimetria do veículo segundo o plano $\{y_B, z_B\}$ leva a

uma rotação segundo *yaw* quando o veículo se desloca segundo y_B e vice-versa. Esta assimetria implica que os termos $Y_{r|r|}$, $Z_{q|q|}$, $M_{w|w|}$ e $N_{r|r|}$ sejam diferentes de zero. A assimetria relativamente ao plano $\{x_B, y_B\}$ implica que os termos $X_{q|q|}$, $Y_{p|p|}$, $K_{v|v|}$ e $M_{u|u|}$ sejam não nulos. Após simplificação, resulta a seguinte matriz de amortecimento viscoso (*drag*):

$$D_V(v_r) = - \begin{bmatrix} X_{u|u|}|u| & 0 & 0 & 0 & X_{q|q|}|q| & 0 \\ 0 & Y_{v|v|}|v| & 0 & Y_{p|p|}|p| & 0 & Y_{r|r|}|r| \\ 0 & 0 & Z_{w|w|}|w| & 0 & Z_{q|q|}|q| & 0 \\ 0 & K_{v|v|}|v| & 0 & K_{p|p|}|p| & 0 & 0 \\ M_{u|u|}|u| & 0 & M_{w|w|}|w| & 0 & M_{q|q|}|q| & 0 \\ 0 & N_{v|v|}|v| & 0 & 0 & 0 & N_{r|r|}|r| \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Expressa-se a força quadrática de *drag* (Faltinsen, 2005) na direcção x_B como

$$f_{du}(u_r) = -\frac{1}{2} \rho_f C_D A_{yz} u_r |u_r|. \quad (3.31)$$

em que C_D é o coeficiente de *drag* e A_{yz} a área projectada do veículo no plano $\{y_B, z_B\}$.

O coeficiente de *drag* pode ser obtido experimentalmente usando (3.31):

$$C_D = -\frac{2f_{du}(u_r)}{\rho_f A_{yz} u_r |u_r|}. \quad (3.32)$$

Numa primeira abordagem, estimar-se-á C_D recorrendo a expressões semi-empíricas. Este coeficiente depende de número de Reynolds R_e , cuja expressão se mostra a seguir:

$$R_e = \frac{Ul}{\nu} = 1.5 \cdot 10^6, \quad (3.33)$$

em que U é a velocidade do veículo, $l \approx 1.5m$ o comprimento e ν a viscosidade do fluido envolvente. Assume-se $U = 1m/s$ como um valor típico de velocidade segundo x_B , $\nu = 1.005e - 6 m^2/s$ para uma temperatura $T = 20^\circ C$.

Para este valor de R_e o movimento do veículo encontra-se na zona de transição entre o fluxo laminar e turbulento (White, 1999). Usando a teoria de fluxo laminar, recorre-se à expressão à seguinte expressão (Hoerner, 1965) para corpos elipsoidais com velocidade não nula segundo x_B :

$$C_{Dle} = 0.44 \frac{d}{l} + 4C_f \frac{l}{d} + 4C_f \left(\frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.34)$$

em que C_f é o coeficiente de fricção dado em (Faltinsen, 2005) por:

$$C_f = \frac{0.075}{(\log_{10} R_e - 2)^2}. \quad (3.35)$$

Resulta o valor $C_{Dle} = 0.20$. Este valor é próximo do obtido experimentalmente por (Presterio, 2001) para um veículo com características semelhantes às do MARES.

Usando os valores dados por (White, 1999) para o fluxo turbulento, obtém-se $C_{Dte} \approx 0.08$. No cálculo dos termos de *drag* considerar-se-á $C_{De} = C_{Dle}$, dado este ser o valor mais próximo do obtido experimentalmente por Presterio num veículo com dimensões próximas das do AUV MARES. Admite-se que os invólucros dos motores dos propulsores possuem o mesmo coeficiente de *drag* C_{De} .

O movimento segundo y_B e z_B origina um fluxo à volta do veículo. De modo a determinar o coeficiente de *drag* para este movimento, considera-se que o veículo pode ser aproximado por um cilindro. Segundo (White, 1999) e (Hoerner, 1965), o coeficiente de *drag* para um cilindro com razão $l/d \approx 7.5$ tem um valor aproximado $C_{Dc} = 0.8$. O invólucro do sonar situado na parte inferior do veículo possui igualmente uma forma cilíndrica, pelo que, recorrendo aos mesmos autores, obtém-se um coeficiente de *drag* $C_{DcS} \approx 0.68$.

Recorrendo às expressões (3.31), deduz-se o termo de *drag* axial segundo x_B :

$$\begin{aligned} X_{u|u|} &= -\frac{1}{2}\rho_f C_D A_{yz} \\ &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{De} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} R_{yz}(z_B) dz_B + 2C_{De} \int_{\frac{d}{2}}^{y_m + \frac{d_m}{2}} R_{pyz}(y_B) dy_B \right. \\ &\quad \left. + 2C_{De} \int_{-\frac{d}{2}}^{-y_m - \frac{d_m}{2}} R_{pyz}(y_B) dy_B \right. \\ &\quad \left. + C_{DcS} \int_{z_{Si}}^{z_{Sf}} L_{Syz}(z_B) dz_B \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

As expressões para a determinação dos restantes termos são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} Y_{v|v|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} R_{xz}(z_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_c} R_{pxz}(x_B) dx_B + 2C_{DcS} \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} H_{Sxz}(x_B) dx_B \right] \\ Z_{w|w|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} R_{xy}(x_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_{mf}} R_{pxy}(x_B) dx_B \right] \\ K_{p|p|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[C_{DcS} \int_{z_{Si}}^{z_{Sf}} |z_B|^3 L_{Syz}(z_B) dz_B \right] \\ M_{q|q|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} |x_B|^3 R_{xy}(x_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_{mf}} |x_B|^3 R_{pxy}(x_B) dx_B \right] \\ &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} |x_B|^3 R_{xz}(z_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_c} |x_B|^3 R_{pxz}(x_B) dx_B \right. \\ N_{r|r|} &\quad \left. + 2C_{DcS} \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} |x_B|^3 H_{Sxz}(x_B) dx_B \right] \\ X_{q|q|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[C_{DcS} \int_{z_{Si}}^{z_{Sf}} z_B |z_B| L_{Syz}(z_B) dz_B \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
Y_{p|p|} &= -X_{q|q|} \\
M_{u|u|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[C_{DCS} \int_{z_{Si}}^{z_{Sf}} z_B L_{SyZ}(z_B) dz_B \right] \\
K_{v|v|} &= -M_{u|u|} \\
&= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} x_B |x_B| R_{xz}(z_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_c} x_B |x_B| R_{PxZ}(x_B) dx_B \right. \\
Y_{r|r|} &\quad \left. + 2C_{DCS} \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} x_B |x_B| H_{Sxz}(x_B) dx_B \right] \\
Z_{q|q|} &= \frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} x_B |x_B| R_{xy}(x_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_{mf}} x_B |x_B| R_{Pxy}(x_B) dx_B \right] \\
M_{w|w|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} x_B R_{xy}(x_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_{mf}} x_B R_{Pxy}(x_B) dx_B \right] \\
N_{v|v|} &= -\frac{1}{2}\rho_f \left[2C_{Dc} \int_{x_c}^{x_n} x_B R_{xz}(z_B) dx_B + 2C_{Dc} \int_{x_d}^{x_c} x_B R_{PxZ}(x_B) dx_B + 2C_{DCS} \int_{x_{Si}}^{x_{Sf}} x_B H_{Sxz}(x_B) dx_B \right].
\end{aligned}$$

Na tabela 3.10, apresentam-se os valores obtidos para os diversos termos de *drag*.

Tabela 3.10 – Coeficientes de *drag*.

Parâmetro	Valor	Unidades
$X_{u u }$	$-4.05 \cdot 10^0$	$kg \cdot m^{-1}$
$Y_{v v }$	$-1.16 \cdot 10^2$	$kg \cdot m^{-1}$
$Z_{w w }$	$-1.16 \cdot 10^2$	$kg \cdot m^{-1}$
$K_{p p }$	$-7.02 \cdot 10^{-4}$	$kg \cdot m^2$
$M_{q q }$	$-1.56 \cdot 10^1$	$kg \cdot m^2$
$N_{r r }$	$-1.25 \cdot 10^1$	$kg \cdot m^2$
$X_{q q }$	$-4.84 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m$
$Y_{p p }$	$4.84 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m$
$M_{u u }$	$-2.11 \cdot 10^{-1}$	kg
$K_{v v }$	$2.11 \cdot 10^{-1}$	kg
$Y_{r r }$	$1.83 \cdot 10^0$	$kg \cdot m$
$Z_{q q }$	$-5.95 \cdot 10^0$	$kg \cdot m$
$M_{w w }$	$-8.26 \cdot 10^0$	kg
$N_{v v }$	$2.13 \cdot 10^0$	kg

3.4.5 Forças de restabelecimento

Considera-se que a origem do sistema de coordenadas fixo ao veículo coincide com o centro de gravidade do mesmo. Usando os valores da tabela 3.2, obtêm-se as novas coordenadas das posições do centro de gravidade e do centro de flutuação, como se apresenta na tabela 3.11.

Tabela 3.11 – Posição dos centros de gravidade e de flutuação

Parâmetro	Valor [m]	Descrição
$[x_{CG}, y_{CG}, z_{CG}]$	$[0,0,0]$	Posição centro de gravidade
$[x_{CF}, y_{CF}, z_{CF}]$	$[0,0,-4.40e-3]$	Posição centro de flutuação

Adicionalmente, considera-se que a força exercida pelos propulsores verticais é aplicada no eixo y_B , isto é, a aplicação das forças de propulsão vertical não induz nenhum momento segundo *roll*. O efeito das assimetrias relativamente ao plano $x_B y_B$ é desprezável no movimento segundo y_B , dadas as pequenas dimensões do invólucro do sonar, da antena e das alças. Estas

considerações permitem deduzir que o ângulo *roll* é aproximadamente nulo ($\phi \approx 0$), em qualquer movimento. Recorrendo à expressão (2.44), obtém-se, após simplificação, o vector de forças e momentos de restabelecimento:

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} (W - B) \sin \theta \\ 0 \\ (B - W) \cos \theta \\ 0 \\ -z_{CF} B \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

3.4.6 Força de propulsão

O AUV MARES possui quatro propulsores, como mostra a figura 3.5. Assume-se que as forças exercidas pelos propulsores horizontais P1 e P2 são paralelas ao eixo x_B enquanto as forças exercidas pelos propulsores verticais P3 e P4 são paralelas ao eixo z_B .

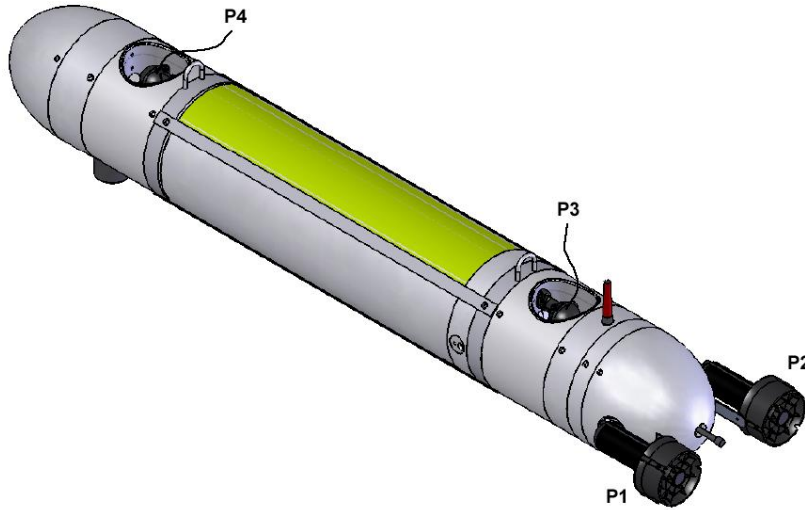


Figura 3.5 – Indicação da posição dos propulsores

Assim, obtêm-se os vectores de força de cada propulsor:

$$f_{P1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{P1}; \quad f_{P2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{P2}; \quad f_{P3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_{P3}; \quad f_{P4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_{P4} \quad (3.39)$$

em que F_{Pi} é a força exercida pelo propulsor i .

Considerando que ponto de aplicação da força exercida pelo propulsor i é dado por

$$r_{Pi} = \begin{bmatrix} x_{Pi} \\ y_{Pi} \\ z_{Pi} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

na tabela 3.12, apresentam-se as coordenadas dos pontos de aplicação das forças exercidas pelos propulsores.

Tabela 3.12 – Coordenadas dos pontos de aplicação das forças de propulsão.

Parâmetro	Valor	Descrição
x_{P1}	$-7.47 \cdot 10^{-1}$	Posição segundo x_B do propulsor $P1$
y_{P1}	$-1.08 \cdot 10^{-1}$	Posição segundo y_B do propulsor $P1$
z_{P1}	$-1.20 \cdot 10^{-3}$	Posição segundo z_B do propulsor $P1$
x_{P2}	$-7.47 \cdot 10^{-1}$	Posição segundo x_B do propulsor $P2$
y_{P2}	$1.08 \cdot 10^{-1}$	Posição segundo y_B do propulsor $P2$
z_{P2}	$-1.20 \cdot 10^{-3}$	Posição segundo z_B do propulsor $P2$
x_{P3}	$-4.21 \cdot 10^{-1}$	Posição segundo x_B do propulsor $P3$
y_{P3}	0	Posição segundo y_B do propulsor $P3$
z_{P3}	0	Posição segundo z_B do propulsor $P3$
x_{P4}	$4.34 \cdot 10^{-1}$	Posição segundo x_B do propulsor $P4$
y_{P4}	0	Posição segundo y_B do propulsor $P4$
z_{P4}	0	Posição segundo z_B do propulsor $P4$

Calcula-se o vector de força e momento exercidos pelo propulsor i da seguinte forma:

$$\tau_{Pi} = \begin{bmatrix} f_{Pi} \\ - \\ - \\ - \\ r_{Pi} \times f_{Pi} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

A seguir, mostra-se a expressão das forças e momentos resultantes dos quatro propulsores

$$\begin{aligned} \tau_P &= \tau_{P1} + \tau_{P2} + \tau_{P3} + \tau_{P4} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{P1} \\ -y_{P1} \end{bmatrix} F_{P1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{P2} \\ -y_{P2} \end{bmatrix} F_{P2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -x_{P3} \\ 0 \end{bmatrix} F_{P3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -x_{P4} \\ 0 \end{bmatrix} F_{P4}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por conveniência, expressar-se-á a forças e momentos resultantes dos propulsores da seguinte forma:

$$\tau_P = P \cdot f_p, \quad (3.43)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ é uma matriz de termos constantes, que se denomina por matriz de propulsão doravante, e $f_p \in \mathbb{R}^4$ é o vector das forças exercidas pelos propulsores, tal que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_{P1} & z_{P2} & -x_{P3} & -x_{P4} \\ -y_{P1} & -y_{P2} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad f_p = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \\ F_{P3} \\ F_{P4} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

3.5 Equações diferenciais do movimento

Baseando-se nas secções 3.3 e 3.4 e na expressão (2.51), obtém-se a seguinte equação para a dinâmica de um veículo inserido num fluido:

$$M\dot{v}_r = -(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r - g(\eta) + Pf_p, \quad (3.45)$$

em que $M = M_{RB} + M_A$.

Decompondo a última expressão segundo as suas linhas, obtém-se

$$(m - X_{\dot{u}})\dot{u} - X_{\dot{q}}\dot{q} = mrv - mqw + (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)q \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} & - (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)r + X_{u|u}|u|u| \\ & + X_{q|q}|q|q| - (W - B) \sin \theta + F_{P1} \\ & + F_{P2} \end{aligned}$$

$$(m - Y_{\dot{v}})\dot{v} - Y_{\dot{p}}\dot{p} - Y_{\dot{r}}\dot{r} = -mru + mpw - (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)p \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & + (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)r + Y_{v|v}|v|v| \\ & + Y_{p|p}|p|p| + Y_{r|r}|r|r| \end{aligned}$$

$$(m - Z_{\dot{w}})\dot{w} - Z_{\dot{q}}\dot{q} = mqu - mpv + (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)p \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} & - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)q + Z_{w|w}|w|w| \\ & + Z_{q|q}|q|q| - (B - W) \cos \theta + F_{P3} \\ & + F_{P4} \end{aligned}$$

$$(I_{xx} - K_{\dot{p}})\dot{p} - K_{\dot{v}}\dot{v} = -I_{zz}rq + I_{yy}qr + (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)v \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} & - (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)w \\ & + (Y_{\dot{r}}v + N_{\dot{r}}r)q \\ & - (X_{\dot{q}}u + Z_{\dot{q}}w + M_{\dot{q}}q)r \\ & + K_{p|p}|p|p| + K_{v|v}|v|v| \end{aligned}$$

$$(I_{yy} - M_{\dot{q}})\dot{q} - M_{\dot{u}}\dot{u} - M_{\dot{w}}\dot{w} = I_zrp - I_{xx}pr - (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)u + (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)w \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & - (Y_{\dot{r}}v + N_{\dot{r}}r)p + (Y_{\dot{p}}v + K_{\dot{p}}p)r \\ & + M_{q|q}|q|q| + M_{w|w}|w|w| \\ & + M_{u|u}|u|u| - z_{CF}B \sin \theta + z_{P1}F_{P1} \\ & + z_{P2}F_{P2} - x_{P3}F_{P3} - x_{P4}F_{P4} \end{aligned}$$

$$(I_{zz} - N_{\dot{r}})\dot{r} - N_{\dot{v}}\dot{v} = -I_{yy}qp + I_{xx}pq + (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)u \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)v \\ & + (X_{\dot{q}}u + Z_{\dot{q}}w + M_{\dot{q}}q)p \\ & - (Y_{\dot{p}}v + K_{\dot{p}}p)q + N_{r|r}|r|r| \\ & + N_{v|v}|v|v| - y_{P1}F_{P1} - y_{P2}F_{P2} . \end{aligned}$$

Capítulo 4

Limites de movimento

Neste capítulo, analisar-se-ão os limites no movimento do veículo inserido num fluido, cujas existências se devem ao limite finito da força de actuação dos propulsores. Começar-se-á por realizar uma análise dos limites dos movimentos axiais simples, prosseguindo com uma análise dos limites dos movimentos angulares e, por fim, com a análise de movimentos compostos por várias restrições.

4.1 Limites de movimentos axiais

Esta secção tem como objectivo determinar os limites do movimento, em regime permanente, segundo os eixos x_B e z_B . Para tal, é necessário conhecer a força de actuação máxima dos propulsores que, segundo o fabricante (Seabotix, 2009), é dada por

$$F_{pmax} \approx 30N. \quad (4.1)$$

Este será o valor considerado nos cálculos a seguir e nas secções subsequentes.

4.1.1 Movimento segundo x_B

Considere-se que o veículo se desloca com velocidade constante u , com movimento axial apenas segundo x_B . Assume-se que as velocidades segundo os restantes eixos lineares e angulares são nulas,

$$v = [u \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (4.2)$$

resultando também

$$\dot{v} = 0_{6 \times 1}. \quad (4.3)$$

Recorda-se que a primeira linha da expressão da dinâmica do veículo em (3.45) é dada por

$$\begin{aligned}
(m - X_{\dot{u}})\dot{u} - X_{\dot{q}}\dot{q} \\
= mrv - mqw + (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)q - (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)r + X_{u|u}|u|u| \\
+ X_{q|q}|q|q| - (W - B) \sin \theta + F_{P1} + F_{P2}.
\end{aligned}$$

Aplicando (4.2) e (4.3) a esta última expressão, resulta

$$X_{u|u}|u|u| - (W - B) \sin \theta + F_{P1} + F_{P2} = 0. \quad (4.4)$$

Considerando que $\theta = 0$ e que $u > 0$, obtém-se facilmente

$$-X_{u|u}|u|^2 = F_{P1} + F_{P2}. \quad (4.5)$$

Dado que $X_{u|u} < 0$, a velocidade máxima segundo x_B é atingida quando a soma $F_{P1} + F_{P2}$ é máxima, pelo que resulta

$$\begin{aligned}
u_{max} &= \sqrt{\frac{2 F_{pmax}}{-X_{u|u}}} \\
&= 3.85 \text{ m/s}.
\end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1.2 Movimento segundo z_B

Nesta subsecção, considera-se que existe apenas movimento segundo z_B , a velocidade $w > 0$ constante, em regime permanente. As restantes velocidades são consideradas nulas:

$$v = [0 \quad 0 \quad w \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (4.7)$$

e, consequentemente,

$$\dot{v} = 0_{6 \times 1}. \quad (4.8)$$

Recorda-se a expressão dada pela terceira linha da equação da dinâmica, em (3.48),

$$\begin{aligned}
(m - Z_{\dot{w}})\dot{w} - Z_{\dot{q}}\dot{q} \\
= mqu - mpv + (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)p - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)q + Z_{w|w}|w|w| \\
+ Z_{q|q}|q|q| - (B - W) \cos \theta + F_{P3} + F_{P4}.
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando (4.7) e (4.8), resulta facilmente

$$-Z_{w|w}|w|w| = F_{P3} + F_{P4}. \quad (4.10)$$

Note-se que o movimento segundo z_B induz uma força no eixo de rotação *pitch*. Na realidade, isto implica que $q \neq 0$. No entanto, para efeito de cálculo, despreza-se a sua influência, dado ser reduzida.

Considerando apenas $w > 0$, a velocidade máxima é atingida quando a soma $F_{P3} + F_{P4}$ é máxima, isto é $F_{P3} = F_{P4} = F_{pmax}$. Obtém-se

$$\begin{aligned} w_{max} &= \sqrt{\frac{2 F_{pmax}}{-Z_{w|w}}} \\ &= 7.19 \cdot 10^{-1} \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Limites de movimentos rotacionais

A seguir, determinar-se-ão as velocidades de rotação segundo *pitch* e segundo *yaw* máximas. Estes limites devem-se à saturação dos propulsores.

4.2.1 Movimento segundo *pitch*

Considera-se que apenas existe velocidade de rotação segundo *pitch* $q > 0$ constante, sendo as restantes componentes nulas

$$v = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad q \quad 0]^T. \quad (4.12)$$

Facilmente se deduz que

$$\dot{v} = 0_{6 \times 1}. \quad (4.13)$$

A quinta linha da equação da dinâmica em (3.45) é dada por

$$\begin{aligned} (I_{yy} - M_{\dot{q}})\dot{q} - M_{\dot{u}}\dot{u} - M_{\dot{w}}\dot{w} \\ = I_z r p - I_{xx} p r - (Z_{\dot{w}} w + Z_{\dot{q}} q)u + (X_{\dot{u}} u + X_{\dot{q}} q)w - (Y_{\dot{r}} v + N_{\dot{r}} r)p \\ + (Y_{\dot{p}} v + K_{\dot{p}} p)r + M_{q|q} q |q| + M_{w|w} w |w| + M_{u|u} u |u| - z_{CF} B \sin \theta \\ + z_{P1} F_{P1} + z_{P2} F_{P2} - x_{P3} F_{P3} - x_{P4} F_{P4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Na verdade, a velocidade angular $q > 0$ induz uma força segundo z_B e segundo x_B devido às assimetrias. Porém, esta influência é desprezada neste cálculo. Consideram-se também o momento restabelecedor $z_{CF} B \sin \theta$ e os momentos devidos à posição dos propulsores horizontais, $z_{P1} F_{P1}$ e $z_{P2} F_{P2}$, desprezáveis, relativamente a termos como $x_{P3} F_{P3}$ e $x_{P4} F_{P4}$. Assim, obtém-se

$$M_{q|q} q^2 = x_{P3} F_{P3} + x_{P4} F_{P4}. \quad (4.15)$$

Sabendo que $M_{q|q|} < 0$, $x_{p3} < 0$ e $x_{p4} > 0$, a velocidade de rotação máxima é atingida quando $F_{p3} = -F_{p4} = F_{pmax}$

$$\begin{aligned} q_{max} &= \sqrt{\frac{x_{p3}F_{p3} + x_{p4}F_{p4}}{M_{q|q|}}} \\ &= 1.28 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2.2 Movimento segundo yaw

Nesta subsecção, considera-se o movimento segundo *yaw* com velocidade $r > 0$ constante. As restantes componentes lineares e angulares de velocidade são consideradas nulas:

$$v = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad r]^T. \quad (4.17)$$

Conclui-se facilmente que

$$\dot{v} = 0_{6 \times 1}. \quad (4.18)$$

Recorda-se que a sexta linha (3.51) da equação da dinâmica do veículo é dada por

$$\begin{aligned} (I_{zz} - N_{\dot{r}})\dot{r} - N_{\dot{v}}\dot{v} &= -I_{yy}qp + I_{xx}pq + (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)u - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)v \\ &+ (X_{\dot{q}}u + Z_{\dot{q}}w + M_{\dot{q}}q)p - (Y_{\dot{p}}v + K_{\dot{p}}p)q + N_{r|r}r|r| + N_{v|v}v|v| \\ &- y_{p1}F_{p1} - y_{p2}F_{p2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Embora o movimento segundo *yaw* induza forças, que, por sua vez, induzem uma velocidade segundo y_B , considera-se que esta está próxima de zero e, portanto, desprezável. Assim, usando (4.17) e (4.18), obtém-se facilmente

$$N_{r|r}r|r| = y_{p1}F_{p1} + y_{p2}F_{p2}. \quad (4.20)$$

Dado que $N_{r|r} < 0$, $y_{p1} < 0$ e $y_{p2} = -y_{p1}$, a velocidade de rotação máxima segundo *yaw* é atingida com $F_{p1} = -F_{p2} = F_{pmax}$, pelo que resulta

$$\begin{aligned} r_{max} &= \sqrt{\frac{2y_{p1}F_{pmax}}{N_{r|r}}} \\ &= 7.20 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3 Limites de movimentos compostos

Nesta secção analisar-se-á o comportamento do veículo, em regime permanente, em determinadas manobras. Mais particularmente, determinar-se-ão alguns parâmetros da trajectória, nos limites da actuação. Considerar-se-á o movimento com velocidade longitudinal e ângulo segundo *pitch* não nulos, a profundidade constante, e o movimento com velocidades longitudinal e segundo *yaw* não nulas.

4.3.1 Movimento com $u \neq 0$ e $\theta \neq 0$, a profundidade constante

Para a análise do comportamento deste movimento, considera-se que as velocidades $u > 0$ e $w > 0$ são constantes, em regime permanente:

$$v = [u \ 0 \ w \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (4.22)$$

Facilmente se conclui que

$$\dot{v} = 0_{6 \times 1}. \quad (4.23)$$

Considere-se a figura 4.1. Para manter a profundidade constante, é necessário que a componente da velocidade u no eixo z seja compensada pela componente da velocidade w no mesmo eixo, assim

$$u \sin \theta = w \cos \theta. \quad (4.24)$$

Usando esta última expressão, deduz-se facilmente

$$w = u \tan \theta. \quad (4.25)$$

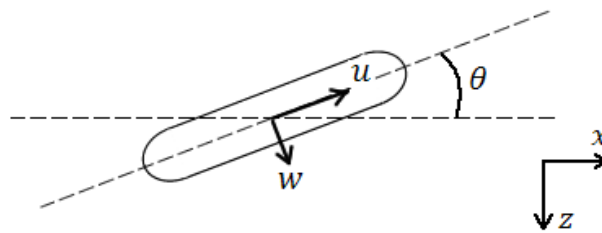


Figura 4.1 – Movimento com $u \neq 0$ e $\theta \neq 0$, a profundidade constante

Recorda-se que a terceira (3.48) e quinta (3.50) linhas da expressão da dinâmica são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (m - Z_{\dot{w}})\dot{w} - Z_{\dot{q}}\dot{q} &= mqu - mpv + (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)p \\ &\quad - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)q + Z_{w|w|}w|w| \\ &\quad + Z_{q|q|}q|q| - (B - W) \cos \theta + F_{P3} \\ &\quad + F_{P4}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned}
(I_{yy} - M_{\dot{q}})\dot{q} - M_{\dot{u}}\dot{u} - M_{\dot{w}}\dot{w} &= I_z r p - I_{xx} p r - (Z_{\dot{w}} w + Z_{\dot{q}} q)u + (X_{\dot{u}} u + X_{\dot{q}} q)w \\
&\quad - (Y_{\dot{r}} v + N_{\dot{r}} r)p + (Y_{\dot{p}} v + K_{\dot{p}} p)r \\
&\quad + M_{q|q|q|q|} + M_{w|w|w|w|} \\
&\quad + M_{u|u|u|u|} - z_{CF} B \sin \theta + z_{P1} F_{P1} \\
&\quad + z_{P2} F_{P2} - x_{P3} F_{P3} - x_{P4} F_{P4}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Nos cálculos a seguir, considerar-se-á uma actuação de modo comum e uma actuação diferencial dos propulsores $P3$ e $P4$, de modo a simplificar a análise.

Modo comum

Considerando o exposto nas expressões (4.22) e (4.23), a simplificação de (4.26) resulta na seguinte equação

$$Z_{|w|w}|w|w - (B - W) \cos \theta + F_{P3} + F_{P4} = 0. \tag{4.28}$$

Conclui-se que, em regime permanente, a resultante das forças segundo o eixo z_B devem-se apenas ao *drag*, às forças restabelecedoras e aos propulsores. Substituindo (4.25) em (4.28) e manipulando algebricamente, obtém-se

$$F_{P3} + F_{P4} = -Z_{|w|w}|u \tan \theta|u \tan \theta + (B - W) \cos \theta. \tag{4.29}$$

Modo diferencial

Da mesma forma que para o modo comum, aplicam-se as expressões (4.22) e (4.23) em (4.27), obtém-se

$$M_{|w|w}|w|w - Z_{\dot{w}} u w + X_{\dot{u}} u w + z_{CF} B \sin \theta - x_{P3} F_{P3} - x_{P4} F_{P4} = 0. \tag{4.30}$$

Em regime permanente, o momento resultante é nulo. É dependente apenas do momento de *drag*, do momento centrípeto da massa acrescentada, do momento das forças restabelecedoras e do momento exercido pelos propulsores. Substituindo (4.25) em (4.30), obtém-se:

$$-x_{P3} F_{P3} - x_{P4} F_{P4} = -M_{|w|w}|u \tan \theta|u \tan \theta + (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u^2 \tan \theta - z_{CF} B \sin \theta. \tag{4.31}$$

Dado que $x_{P3} \approx -x_{P4} \approx -x_p$, resulta:

$$F_{P3} - F_{P4} \approx \frac{-M_{|w|w}|u \tan \theta|u \tan \theta + (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u^2 \tan \theta - z_{CF} B \sin \theta}{x_p}. \tag{4.32}$$

Forças exercidas pelos propulsores

Somando as expressões (4.29) e (4.32), obtém-se facilmente

$$F_{p3} = \frac{1}{2} \left[-Z_{|w|w} |u \tan \theta| u \tan \theta + (B - W) \cos \theta + \frac{-M_{|w|w} |u \tan \theta| u \tan \theta + (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}}) u^2 \tan \theta - z_{CF} B \sin \theta}{x_p} \right] \quad (4.33)$$

Subtraindo (4.32) a (4.29), resulta

$$F_{p4} = \frac{1}{2} \left[-Z_{|w|w} |u \tan \theta| u \tan \theta + (B - W) \cos \theta - \frac{-M_{|w|w} |u \tan \theta| u \tan \theta + (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}}) u^2 \tan \theta - z_{CF} B \sin \theta}{x_p} \right] \quad (4.34)$$

Nas figuras abaixo, mostram-se as actuações necessárias dos propulsores $P3$ e $P4$ em função do ângulo θ , para as velocidades $u = 0.5m/s$ e $u = 1.5m/s$, respectivamente.

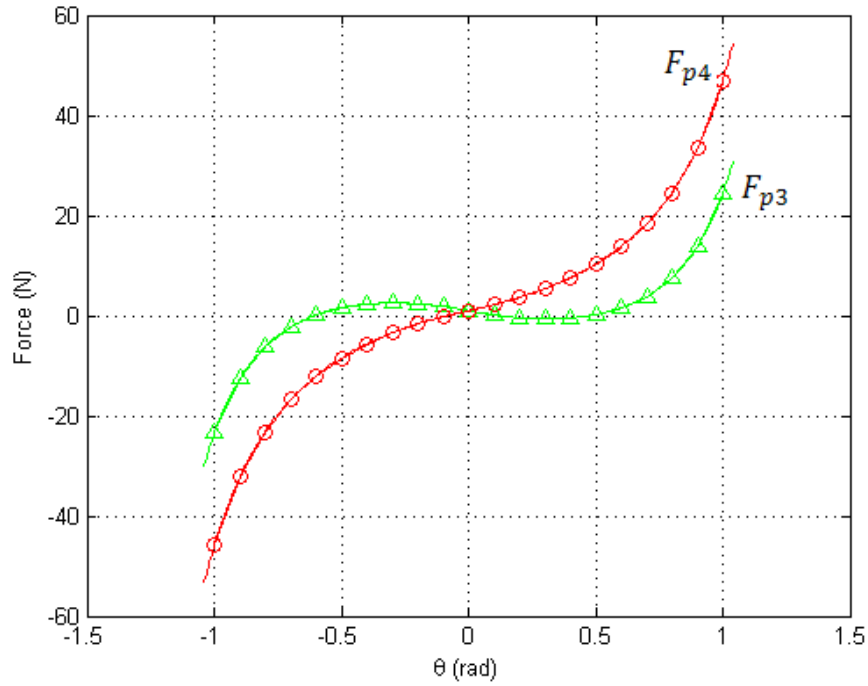


Figura 4.2 – Forças F_{p3} e F_{p4} necessárias em função de θ , para $u = 0.5m/s$

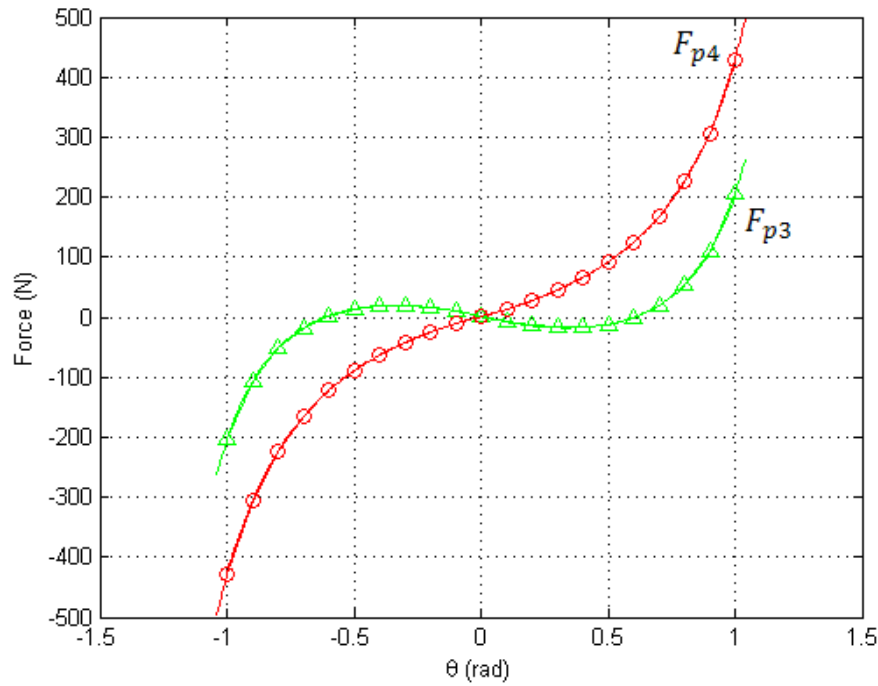


Figura 4.3 – Forças F_{p3} e F_{p4} necessárias em função de θ , para $u = 1.5 \text{ m/s}$

Como se pode verificar pelas figuras acima, a actuação do propulsor $P4$ é superior, em módulo, excepto para ângulos muito próximos de zero. Conhecendo este facto, deduz-se que o limite de actuação do propulsor $P4$ será responsável por limitar o ângulo θ , nas velocidades consideradas. Na figura a seguir, mostra-se o ângulo máximo como uma função da velocidade longitudinal $u > 0$ e ângulo $\theta > 0$. Este gráfico é obtido através da resolução numérica da expressão (4.34) para $F_{p3} = F_{pmax}$. Como se pode verificar, para velocidades próximas de zero, o ângulo θ pode atingir valores máximos próximos de $\pi/2$.

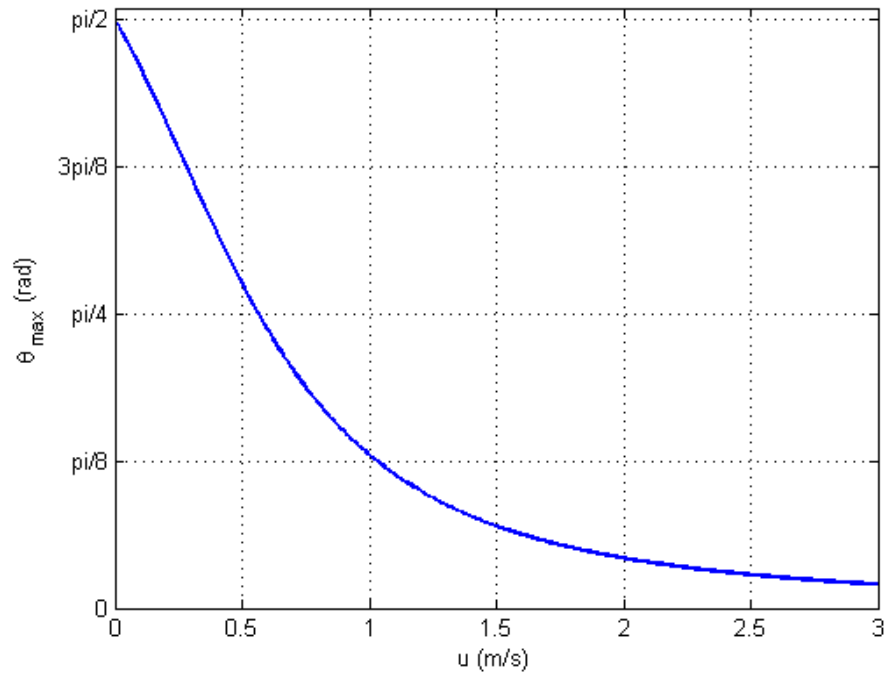


Figura 4.4 – Ângulo θ máximo em função da velocidade longitudinal u .

4.3.2 Movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$

Na análise deste movimento considera-se que as velocidades $u > 0$ e $r > 0$ são constantes, em regime permanente. O facto de estas velocidades serem não nulas simultaneamente, implica que a velocidade lateral v também seja uma constante não nula. Assim, resulta o seguinte vector de velocidade do veículo

$$v = [u \quad v \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad r]. \quad (4.35)$$

Obtém-se facilmente

$$\dot{v} = 0_{6 \times 1}. \quad (4.36)$$

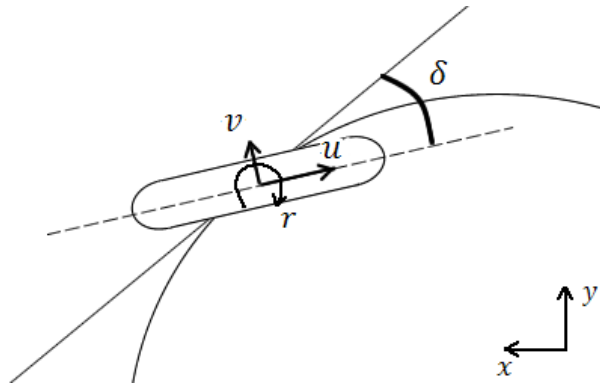


Figura 4.5 - Movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$.

Em regime permanente não existe aceleração linear nem angular, pelo que se pode concluir

$$r = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R}, \quad (4.37)$$

em que R é o raio de curvatura descrita pelo veículo.

Recorrendo à expressão da dinâmica do veículo em (3.45), selecciona-se a segunda linha, resultando

$$\begin{aligned} (m - Y_v)\dot{v} - Y_{\dot{p}}\dot{p} - Y_{\dot{r}}\dot{r} = \\ = -mru + mpw - (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)p + (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)r + Y_{v|v}|v|v| \\ + Y_{p|p}|p|p| + Y_{r|r}|r|r|. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tendo em conta as considerações nas expressões (4.35) e (4.36), da expressão acima resulta

$$(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{r|r}|r|)r + Y_{v|v}|v|v = 0. \quad (4.39)$$

Da manipulação algébrica da última expressão, resulta

$$|v|v = -\frac{(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{r|r}|r|)r}{Y_{v|v}}. \quad (4.40)$$

Nesta subsecção, analisar-se-á apenas o caso em que $r > 0$. Desdobrando $|v|$ em (4.40), obtém-se

$$v^2 = \begin{cases} \frac{(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{r|r}|r|)r}{Y_{v|v}} & , v < 0 \\ -\frac{(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{r|r}|r|)r}{Y_{v|v}} & , v \geq 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Substituindo r em (4.37) na expressão acima, vem

$$v^2 = \begin{cases} \frac{\left(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{r|r}\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R}\right)\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R}}{Y_{v|v}} & , v < 0 \\ -\frac{\left(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{r|r}\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R}\right)\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R}}{Y_{v|v}} & , v \geq 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

A resolução de (4.42) para $v \geq 0$ é impossível para $R \geq 1$. Assim, para raios de curvatura $R \geq 1$, pode-se deduzir que os sinais de v e de r são diferentes.

A resolução numérica da expressão (4.42), tendo em conta (4.37), permite obter o gráfico da velocidade lateral v em função do raio de curvatura R para várias velocidades, mostrado na figura seguinte.

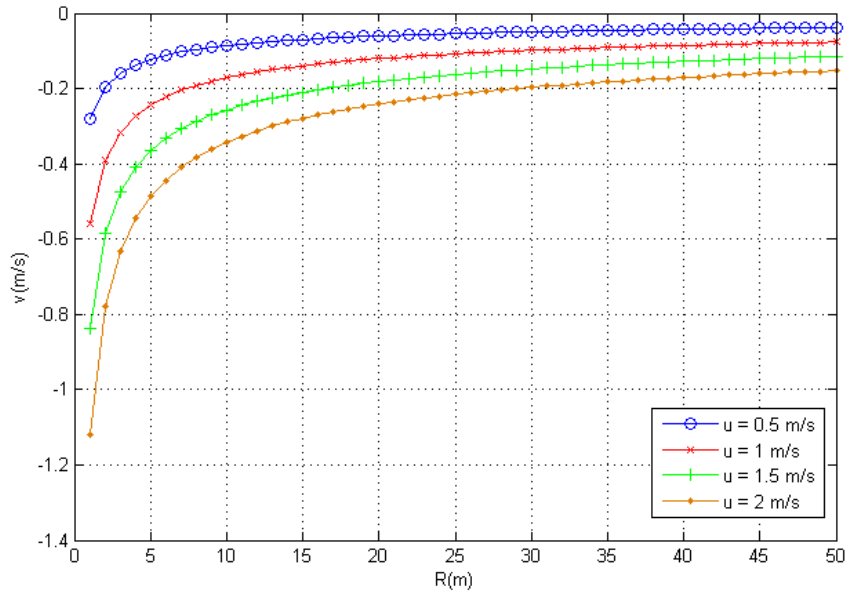


Figura 4.6 – Velocidade lateral v em função do raio de curvatura R .

Desta análise, pode-se extrair outro resultado interessante relativo ao ângulo realizado com a tangente da circunferência descrita pelo veículo, δ (ver figura 4.5). Este obtém-se através da expressão seguinte

$$\delta = \arctan -\frac{v}{u}. \quad (4.43)$$

Esta expressão permite obter o gráfico do ângulo δ em função do raio de curvatura, como se mostra na figura a seguir. Para velocidades superiores a $u = 0.5 \text{ m/s}$, a evolução de δ em função de R é muito semelhante, pelo que apenas se mostra o resultado para $u = 1 \text{ m/s}$. Pelo exposto na figura, deduz-se que o veículo realiza uma trajectória circular apontando com o nariz para o interior da circunferência.

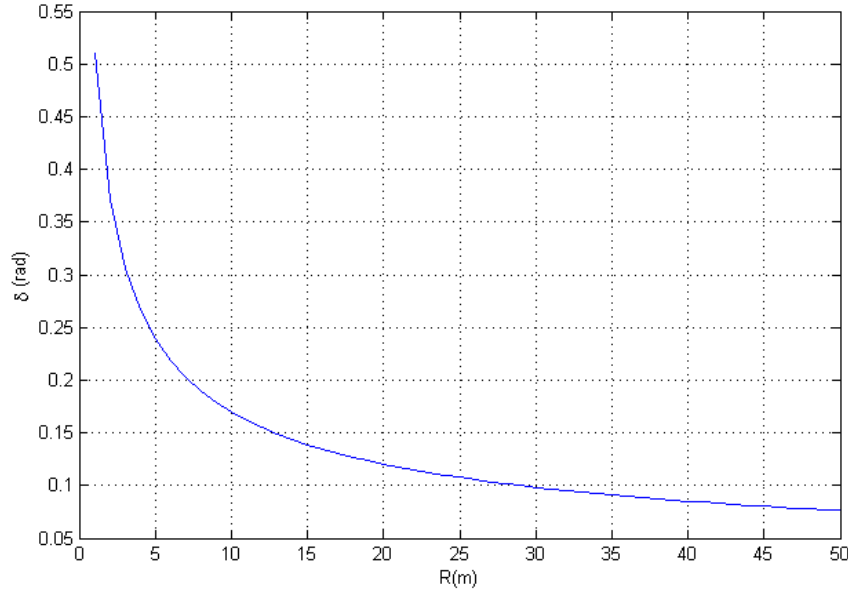


Figura 4.7 – Ângulo δ realizado com a tangente à circunferência em função do raio de curvatura R

Recordam-se as expressões dadas pela primeira e sexta linha da equação da dinâmica em (3.45), respectivamente

$$\begin{aligned}
 (m - X_{\dot{u}})\dot{u} - X_{\dot{q}}\dot{q} &= mrv - mqw + (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)q - (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)r \\
 &\quad + X_{u|u}|u|u| + X_{q|q}|q|q| - (W - B) \sin \theta + F_{P1} + F_{P2}.
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

e

$$\begin{aligned}
 (I_{zz} - N_{\dot{r}})\dot{r} - N_{\dot{v}}\dot{v} &= -I_{yy}qp + I_{xx}pq + (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{r}}r)u - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{q}}q)v \\
 &\quad + (X_{\dot{q}}u + Z_{\dot{q}}w + M_{\dot{q}}q)p - (Y_{\dot{p}}v + K_{\dot{p}}p)q + N_{r|r}|r|r| + N_{v|v}|v|v| \\
 &\quad - y_{P1}F_{P1} - y_{P2}F_{P2}.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Com o objectivo de obter maior simplicidade, realizar-se-á uma análise de modo comum, usando a expressão (4.44), e uma análise de modo diferencial, usando a expressão (4.45).

Modo comum

Recorrendo à expressão (4.44) e às considerações feitas em (4.35) e (4.36), obtém-se

$$-(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r)r + mrv + X_{u|u}|u|u| + f_{p1} + f_{p2} = 0. \tag{4.46}$$

A componente das forças exercidas sobre o veículo segundo o eixo x_B deve-se às forças de Coriolis e centríptas da massa acrescentada, de *drag* e dos propulsores. Manipulando algebricamente (4.46), obtém-se facilmente

$$F_{p1} + F_{p2} = (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r)r - mrv - X_{|u|u}|u|u. \quad (4.47)$$

Modo diferencial

Recorrendo à expressão (4.45) e às considerações feitas em (4.35) e (4.36), obtém-se

$$-(-Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{r}}r)u - X_{\dot{u}}uv + N_{|v|v}|v|v + N_{|r|r}|r|r - y_{p1}F_{p1} - y_{p2}F_{p2} = 0 \quad (4.48)$$

O momento resultante, segundo *yaw*, depende dos termos de Coriolis e centrípetos da massa acrescentada, do *drag* e dos propulsores. Pelo exposto no Capítulo 3, sabe-se que $y_{p1} = -y_{p2} = -y_p$, pelo que se pode concluir que

$$F_{p1} - F_{p2} = \frac{(-Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{r}}r)u + X_{\dot{u}}uv - N_{|v|v}|v|v - N_{|r|r}|r|r}{y_p} \quad (4.49)$$

Força exercida pelos propulsores

Somando a expressão em (4.47) à expressão em (4.49), obtém-se a força exercida pelo propulsor *P1* em regime permanente

$$F_{p1} = \frac{1}{2} \left[(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r)r - mrv - X_{|u|u}|u|u + \frac{(-Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{r}}r)u + X_{\dot{u}}uv - N_{|v|v}|v|v - N_{|r|r}|r|r}{y_p} \right]. \quad (4.50)$$

Subtraindo (4.49) a (4.47), resulta a força exercida pelo propulsor *P2* em regime permanente

$$F_{p2} = \frac{1}{2} \left[(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r)r - mrv - X_{|u|u}|u|u - \frac{(-Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{r}}r)u + X_{\dot{u}}uv - N_{|v|v}|v|v - N_{|r|r}|r|r}{y_p} \right]. \quad (4.51)$$

Na figura seguinte, mostra-se os gráficos das forças exercidas pelos propulsores horizontais em função do raio de curvatura *R*, para uma velocidade $u = 1m/s$.

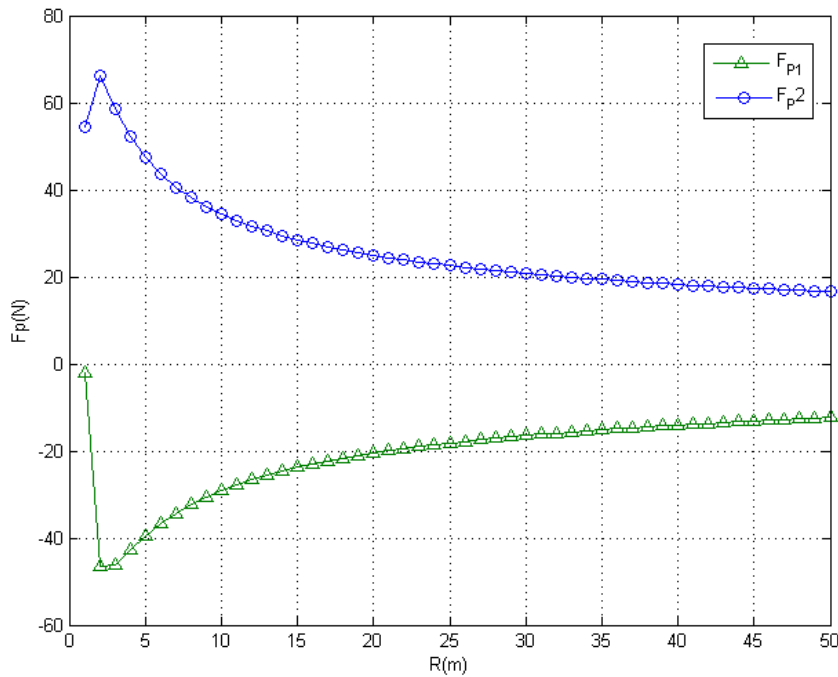


Figura 4.8 – Forças aplicadas pelos propulsores P_1 e P_2 em função do raio de curvatura para $u = 1 \text{ m/s}$.

O resultado obtido é pouco empírico. O gráfico acima exprime implicitamente que, em regime permanente, os propulsores horizontais devem exercer um momento contrário à velocidade de rotação r . Na secção a seguir, realizam-se algumas considerações sobre este paradoxo.

4.4 Considerações sobre o modelo

Como se referiu na secção anterior, alguns resultados obtidos através do modelo são paradoxais. Nesta secção, realizar-se-ão alguns comentários e considerações sobre o modelo.

4.4.1 Movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$

Considere-se o caso do movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$ da subsecção 4.3.2. É pouco empírico que os propulsores horizontais devam exercer um momento contrário à velocidade de rotação segundo *yaw*, r . Analisando a expressão (4.49), deduz-se que o termo dado por $Y_{\dot{v}}uv$ torna-se dominante para velocidades $u \gg 0$ e $r > 0$, ou $u > 0$ e $r \gg 0$, devido ao crescimento de v , em módulo, com estas grandezas. Tal facto implica que o momento exercido pelos propulsores segundo *yaw* seja contrário ao momento dado pelo termo $-Y_{\dot{v}}uv$ (contrário à velocidade angular r). Os termos lineares cruzados, tal como $X_{\dot{u}}uv$, $Y_{\dot{v}}uv$ ou ainda $Z_{\dot{w}}uw$ e $X_{\dot{u}}uw$, são denominados de *Munk moment* (Yue, 2005c). Estes devem-se à diferença de pressão que o fluido exerce no veículo. Para o movimento com $u > 0$ e $v < 0$, a pressão exercida no nariz é maior que a pressão exercida na cauda, criando um momento que leva o veículo a colocar-se perpendicularmente ao seu movimento linear relativo ao fluido. Estes termos são deduzidos tendo em conta que o corpo se move num fluido com viscosidade nula e sem

circulação. No entanto, tal não acontece na realidade. Acredita-se que, na prática, estes termos existem mas são compensados por termos anteriormente desprezados, como o termo de *drag* cruzado $N_{uv}uv$, no caso do movimento horizontal, pois o efeito do *Munk Moment* neste modelo está claramente sobredimensionado. Assim, com o objectivo de aproximar o comportamento do modelo do comportamento real, os termos de *Munk moment* segundo *pitch* e *yaw* serão desprezados, doravante.

As expressões das forças exercidas pelos propulsores, para um movimento com $u \neq 0$ e $r \neq 0$, resultam

$$F_{p1} = \frac{1}{2} \left[(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r) - mrv - X_{|u|u}|u|u + \frac{-Y_{\dot{r}}ur - N_{|v|v}|v|v - N_{|r|r}|r|r}{y_p} \right], \quad (4.52)$$

$$F_{p2} = \frac{1}{2} \left[(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r) - mrv - X_{|u|u}|u|u - \frac{-Y_{\dot{r}}ur - N_{|v|v}|v|v - N_{|r|r}|r|r}{y_p} \right]. \quad (4.53)$$

Nas figuras 4.9 e 4.10, apresentam-se os resultados das forças exercidas para as velocidades $u = 0.5m/s$ e $u = 1.5m/s$, respectivamente.

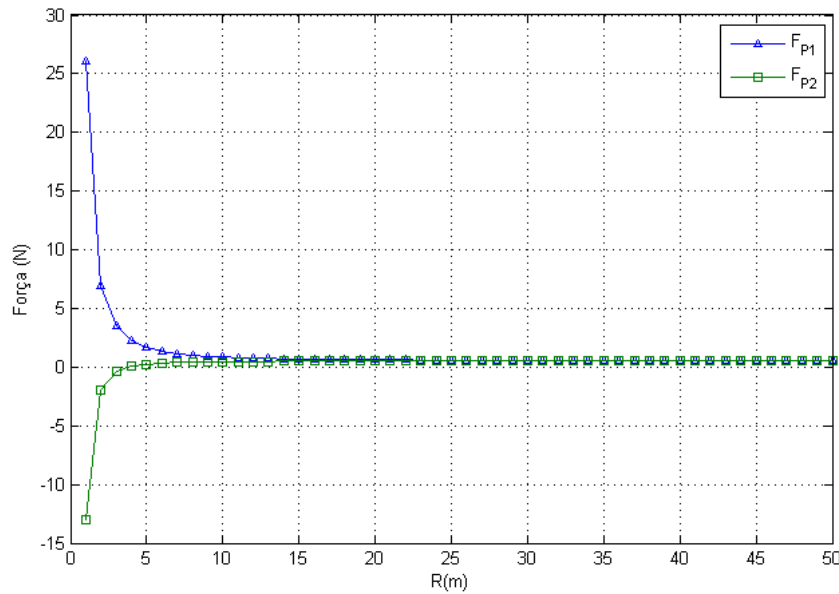


Figura 4.9 – Forças aplicadas pelos propulsores **P1** e **P2** em função do raio de curvatura **R** para $u = 0.5m/s$.

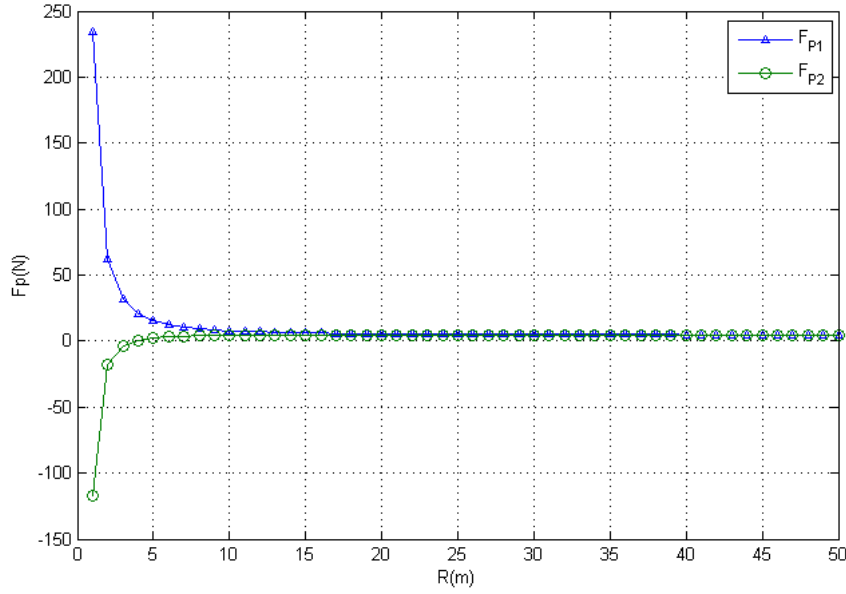


Figura 4.10 – Forças aplicadas pelos propulsores **P1** e **P2** em função do raio de curvatura **R** para **u = 1.5m/s**.

u =

A menos de um factor de escala, as duas figuras apresentam as mesmas curvas. Pode-se observar que para $u = 1.5m/s$, para o mesmo raio de curvatura, a força exercida pelos propulsores deve ser dez vezes maior que para o caso em que $u = 0.5m/s$.

Neste caso, tal como se previa, o propulsor *P1* exerce maior força que o propulsor *P2*. Estas forças tendem para o mesmo valor para raios de curvatura elevados, quando o movimento é aproximadamente rectilíneo.

Pelo exposto nas figuras atrás, o propulsor *P1* exerce sempre maior força, em módulo, para $r > 0$. Considerando o limite da sua actuação, $F_{P1} = F_{pmax}$, resolve-se o sistema de equações dadas por (4.52), (4.37) e (4.39), que se mostra a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{p1} = \frac{1}{2} \left[(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r)r - mrv - X_{|u|u}|u|u \right. \\ \quad \left. + \frac{(-Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{r}}r)u + X_{\dot{u}}uv - N_{|v|v}|v|v - N_{|r|r}|r|r}{\gamma_p} \right] \\ r = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R} \\ |v|v = -\frac{(X_{\dot{u}}u - mu + Y_{|r|r}|r|)r}{Y_{|v|v}}. \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Dada a elevada não linearidade deste sistema de equações, opta-se por realizar uma resolução numérica, cujo resultado se apresenta na figura a seguir sob forma de gráfico da velocidade máxima segundo x_B , u_{max} , em função do raio de curvatura R .

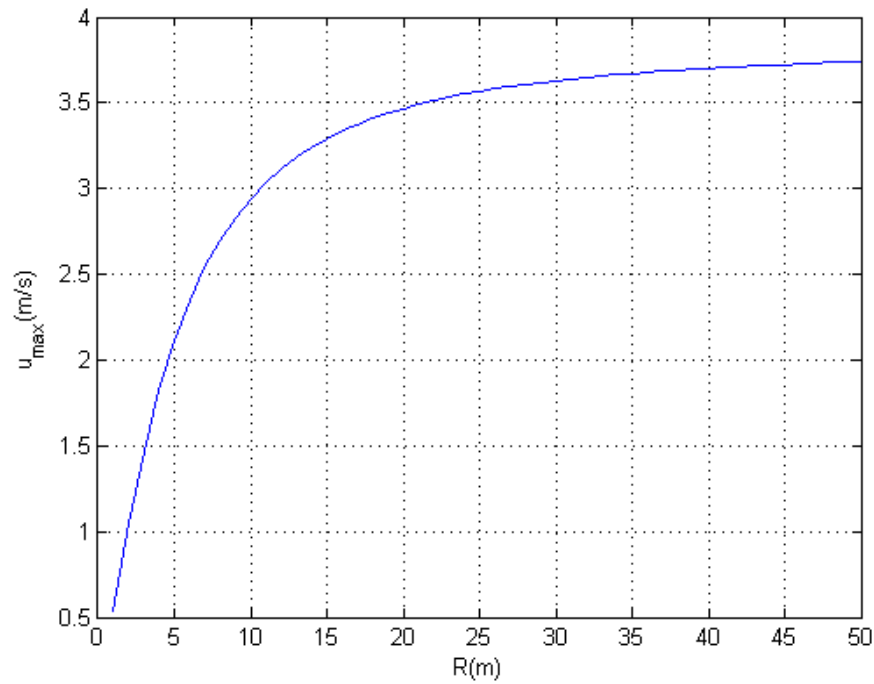


Figura 4.11 – Velocidade longitudinal máxima em função do raio de curvatura.

Como se previa a velocidade longitudinal máxima cresce com o raio de curvatura, tendendo para o seu valor máximo (apenas com movimento longitudinal, ver subsecção 4.1.1) quando o raio de curvatura tende para valores elevados. Desta análise, pode ainda extrair-se o ângulo δ formado entre o veículo e a tangente à circunferência descrita (ver figura 4.5). Apresenta-se, na figura a seguir, o seu valor em função do raio de curvatura para uma velocidade $u = 1\text{ m/s}$. Este gráfico permanece inalterado na gama de velocidade longitudinal considerada ($u \geq 0.5\text{ m/s}$).

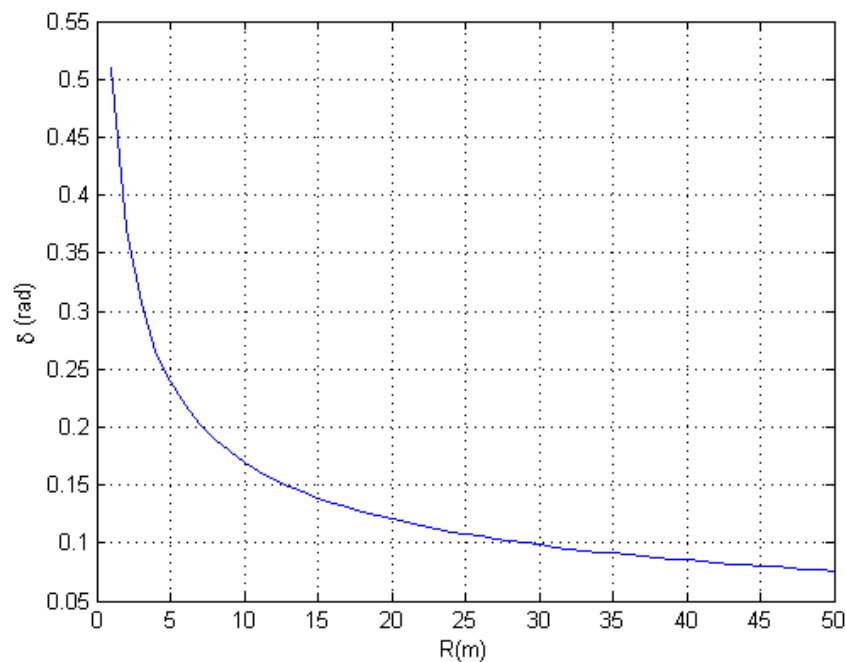


Figura 4.12 – Ângulo δ realizado com a tangente à circunferência.

Na figura a seguir, mostra-se a evolução da velocidade de rotação segundo yaw , r , em função do raio de curvatura para $u = 1\text{m/s}$.

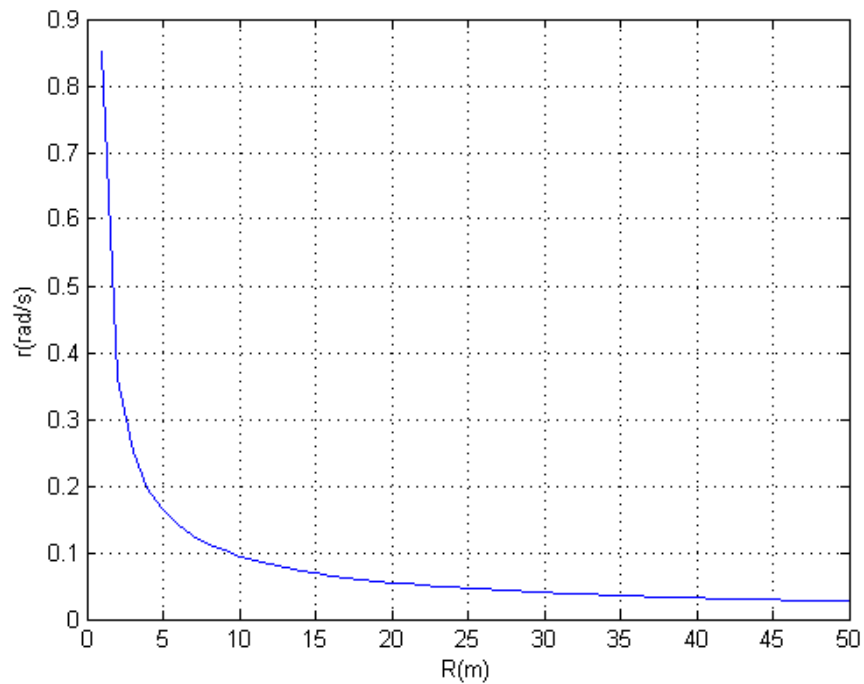


Figura 4.13 – Velocidade angular em função do raio de curvatura para $u = 1\text{m/s}$.

Destes resultados, pode-se ainda determinar a velocidade longitudinal máxima u_{max} em função da velocidade angular r , como se mostra na figura a seguir.

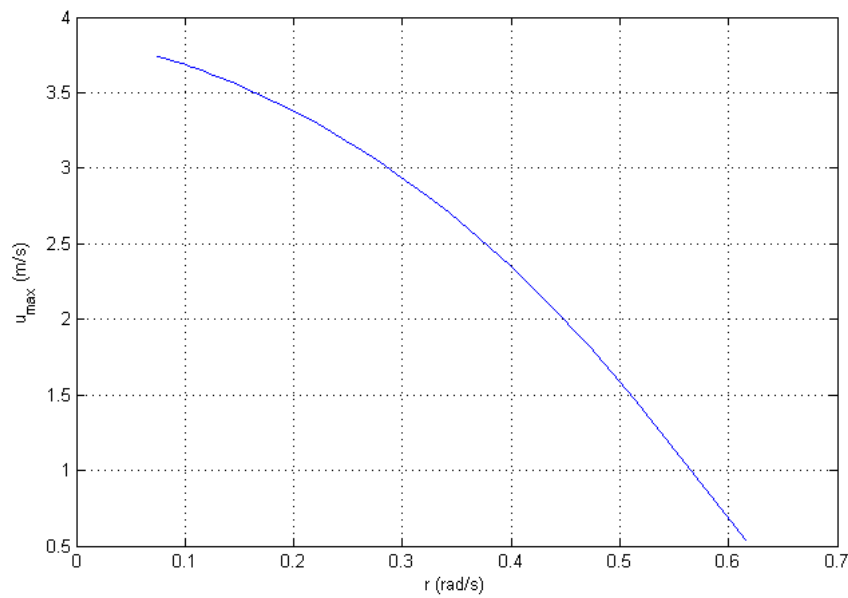


Figura 4.14 – Velocidade longitudinal u máxima em função da velocidade de rotação r

Capítulo 5

Controlo

De modo a realizar determinadas manobras, é necessário um controlo adequado do AUV MARES. Recorrendo à teoria apresentada no Capítulo 2, determinar-se-ão vários controladores. Neste capítulo, começa-se por apresentar o desenvolvimento de controladores de velocidade vertical e horizontal, prosseguindo com os controladores de posição. Estes últimos permitirão que o veículo permaneça numa determinada posição vertical, siga uma recta, um círculo ou permaneça imóvel na coluna de água.

No Capítulo 3, determinou-se um modelo ao qual se realizou alguns ajustes no Capítulo 4. Este permite obter uma aproximação do comportamento real do veículo, estando, no entanto, afectado por incertezas de modelação e termos que se desprezaram. No desenvolvimento dos controladores que se seguem, estas divergências são consideradas perturbações no funcionamento do veículo.

O método usado para a obtenção de alguns controladores é semelhante, pelo que alguns dos desenvolvimentos também o serão. Neste capítulo, opta-se por apresentar todos os desenvolvimentos de forma independente, embora alguns resultados se possam repetir em algumas expressões.

5.1 Controlador de velocidade vertical

Nesta secção, apresentar-se-á um controlador de velocidade para o AUV MARES. Este será baseado na teoria de Lyapunov, usando técnicas de *Backstepping* (Hassan, 2002) ou (Aguilar, et al., 2006). Estas técnicas permitirão determinar um controlador que leve o sistema à estabilidade para um estado próximo de uma referência definida.

5.1.1 Redução de ordem do modelo

Nesta secção, apenas se consideram os movimentos segundo x_B , y_B e *pitch*. A segunda, quarta e sexta linha e coluna da equação da dinâmica são eliminadas, resultando

$$\begin{aligned}
M_{RB} &= \begin{bmatrix} m & 0 & mz_G \\ 0 & m & -mx_G \\ mz_G & -mx_G & I_{yy} \end{bmatrix} & C_{RB}(v_r) &= \begin{bmatrix} 0 & mq & -mx_G q \\ -mq & 0 & -mz_G q \\ mx_G q & mz_G q & 0 \end{bmatrix} \\
M_A &= - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & X_{\dot{q}} \\ 0 & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{q}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{q}} \end{bmatrix} & C_A(v_r) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w_r - Z_{\dot{q}}q_r \\ 0 & 0 & X_{\dot{u}}u_r + X_{\dot{q}}q_r \\ Z_{\dot{w}}w_r + Z_{\dot{q}}q_r & -X_{\dot{u}}u_r - X_{\dot{q}}q_r & 0 \end{bmatrix} \\
D_V(v_r) &= - \begin{bmatrix} X_{u|u}|u| & 0 & X_{q|q}|q| \\ 0 & Z_{w|w}|w| & Z_{q|q}|q| \\ M_{u|u}|u| & M_{w|w}|w| & M_{q|q}|q| \end{bmatrix} & g(\eta) &= \begin{bmatrix} (W - B) \sin \theta \\ (B - W) \cos \theta \\ -z_{CF} B \sin \theta \end{bmatrix} \\
P &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -x_{P3} & -x_{P4} \end{bmatrix} & f_p &= \begin{bmatrix} F_{P3} \\ F_{P4} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

A figura 5.1 ilustra o movimento vertical.

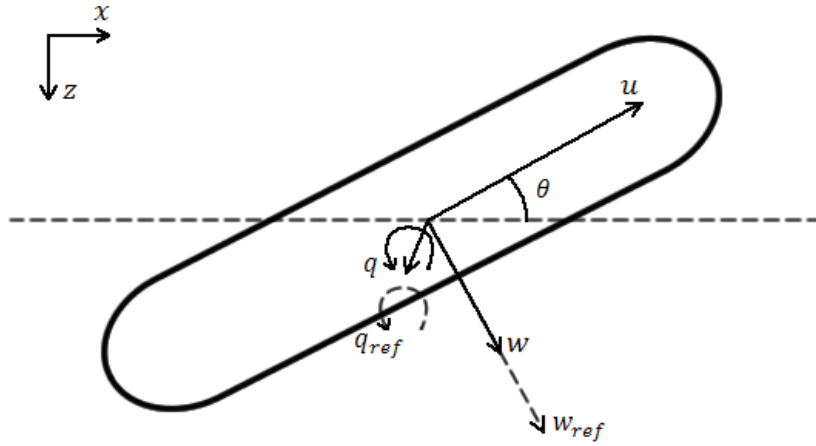


Figura 5.1 – Movimento vertical do MARES

5.1.2 Determinação do controlador

Deseja-se controlar a velocidade vertical w e a velocidade angular q (ver figura acima). Começa-se por definir o erro entre o estado da velocidade e a referência, resultando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
e &= v_r - v_{ref} \\
&= \begin{bmatrix} u - u_{ref} \\ w - w_{ref} \\ q - q_{ref} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ w - w_{ref} \\ q - q_{ref} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

em que u_{ref} , w_{ref} e q_{ref} são as referências de velocidades linear segundo x_B , z_B e angular segundo $pitch$, respectivamente.

Note-se que o erro da velocidade segundo x_B é sempre nulo ($u - u_{ref} = 0$), dado que não se está interessado em controlar esta variável com este controlador. Este erro é introduzido porque a velocidade u tem uma elevada influência em w e em q , como se pode verificar pelas equações diferenciais do movimento em (3.46)-(3.51). Assume-se que a influência das velocidades linear v e angular r é desprezável para o movimento segundo z_B e $pitch$.

Define-se a candidata a função de Lyapunov do sistema controlado:

$$V = \frac{1}{2} e^T e \quad (5.3)$$

Segundo a teoria de Lyapunov (Slotine, et al., 1991), a estabilidade do sistema implica que a derivada da função candidata seja negativa definida, isto é,

$$\dot{V} < 0 \quad (5.4)$$

Em (5.5), mostra-se a expressão da derivada da função de Lyapunov.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} \\ &= e^T (\dot{v}_r - \dot{v}_{ref}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Usando (5.4) e (5.5), deduz-se:

$$e^T (\dot{v}_r - \dot{v}_{ref}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_r - \dot{v}_{ref} < -k_e e, \quad (5.6)$$

em que $k_e \in \mathbb{R}, k_e > 0$.

Com o objectivo de satisfazer a inequação em (5.6), e sabendo que não se consegue variar o valor de e instantaneamente, define-se uma nova variável de erro α , que se pretende levar para zero, tal que

$$\begin{aligned} \alpha &= \dot{v}_r - \dot{v}_{ref} + k_e e \\ &\Downarrow \\ \dot{v}_r &= \alpha + \dot{v}_{ref} - k_e e. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Reescreve-se a derivada da função de Lyapunov

$$\dot{V} = e^T (\alpha - k_e e). \quad (5.8)$$

Recorda-se a equação da dinâmica do veículo:

$$M\dot{v}_r = -(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r - g(\eta) + Pf_p \quad (5.9)$$

Substituindo (5.7) em (5.9) e manipulando algebricamente a equação, assumindo que a matriz M é invertível, obtém-se

$$\alpha = M^{-1} [-(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r - g(\eta) - M(\dot{v}_{ref} - k_e e) + Pf_p]. \quad (5.10)$$

Admite-se que se pode actuar directamente em f_p , isto é, f_p é a variável de entrada do sistema. De forma a garantir que a derivada da função de Lyapunov é negativa, escolhe-se f_p como se mostra a seguir:

$$f_p = P^+[(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r + g(\eta) + M(\dot{v}_{ref} - k_e e)] \quad (5.11)$$

em que P^+ é a inversa generalizada de P .

Assim, a derivada da função de Lyapunov resulta sempre negativa:

$$\dot{V} = -k_e e^T e. \quad (5.12)$$

O ganho k_e será calculado a seguir.

5.1.3 Cálculo do ganho

O ganho k_e é calculado com o objectivo de evitar a saturação prolongada dos propulsores. Ganhos demasiado elevados podem originar saturação para pequenos desvios da velocidade de referência, levando, em casos extremos, à comutação entre o valor máximo e o valor mínimo de saturação, actuando como um controlador de dois níveis. Ganhos muito reduzidos traduzem-se em comportamentos lentos e num erro de regime permanente elevado. Assim, é necessário encontrar um comportamento intermédio que permita uma resposta suficientemente rápida, com erro de regime permanente reduzido e evitando, por outro lado, a saturação prolongada dos propulsores.

Seja f_{pmax} o módulo da força máxima que os propulsores podem exercer. Segundo (Seabotix, 2009), estes podem exercer uma força tal que

$$F_{pmax} \approx 30N. \quad (5.13)$$

Numa primeira abordagem, calcula-se o ganho de forma a obedecer a determinados critérios, obtendo assim uma noção da ordem de grandeza do mesmo. Este poderá ser ajustado posteriormente através de experiências depois de implementar os controladores. As expressões e resultados que se apresentam a seguir têm como objectivo evitar a saturação da força exercida pelos propulsores.

Recorrendo à expressão (5.11), assumindo que o veículo está em repouso relativamente ao fluido e que as forças de restabelecimento são desprezáveis, tem-se

$$f_p = P^+[M(\dot{v}_{ref} - k_e e)]. \quad (5.14)$$

Despreza-se também a derivada da velocidade de referência \dot{v}_{ref} . Arbitra-se um limite inferior e superior do erro de velocidade segundo z_B (valor de saturação):

$$|e_w| = |w - w_{ref}| \leq e_{wmax} = 0.5m/s. \quad (5.15)$$

Considerando $f_p = [F_{pmax}, F_{pmax}]^T$ e o erro da velocidade segundo *pitch* nulo, tal que $e = [0, e_{wmax}, 0]^T$, obtém-se

$$\begin{aligned} k_e &= -e^+ M^{-1} P f_p \\ &= 1.70. \end{aligned} \quad (5.16)$$

em que e^+ é a inversa generalizada de e .

O erro de velocidade angular segundo *pitch* $e_q = q - q_{ref}$ deve igualmente estar limitado de forma a não saturar a actuação dos propulsores. Estando k_e calculado, é possível determinar o valor de saturação do erro. Para tal, assume-se que o veículo está em repouso em relação ao fluido e que os pontos de aplicação das forças exercidas pelos propulsores são simétricos em relação à origem do referencial fixo ao veículo ($x_{p3} \approx -x_{p4}$). Deduz-se facilmente que o valor absoluto máximo do momento exercido pelos propulsores é atingido no caso em que as forças destes são máximas e simétricas. Assim, atinge-se o momento máximo no sentido positivo de *pitch* com $f_p = [F_{pmax}, -F_{pmax}]^T$. Para efeito de cálculo, considera-se que o valor do erro de velocidade segundo z_B é nulo $e_w = 0$. Recorrendo à expressão (5.16) e manipulando-a algebricamente, obtém-se

$$\begin{aligned} e &= -k_e^{-1} M^{-1} P f_p \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.46 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Seleccionando a terceira linha da expressão acima, obtém-se o valor máximo do erro de velocidade angular segundo *pitch*

$$|e_q| = |q - q_{ref}| \leq e_{qmax} = 1.46 \text{ rad/s}. \quad (5.18)$$

5.2 Controlador de velocidade horizontal

Nesta secção, determinar-se-á um controlador de velocidade horizontal para o veículo MARES, recorrendo à teoria de Lyapunov e às técnicas de *Backstepping*. Este será desenvolvido para satisfazer condições de estabilidade e convergência para referências de velocidade longitudinal u_{ref} e velocidade angular segundo *yaw*, r_{ref} . Começar-se-á por reduzir a ordem do modelo de modo a reduzir a complexidade das expressões. Seguidamente, determinar-se-á a expressão de controlo de velocidade horizontal do veículo, cuja dedução é semelhante à dedução do controlador de velocidade vertical. Por fim, calcular-se-ão os valores dos parâmetros do controlador, garantindo o bom funcionamento do sistema.

A figura 5.2 ilustra o movimento horizontal do veículo.

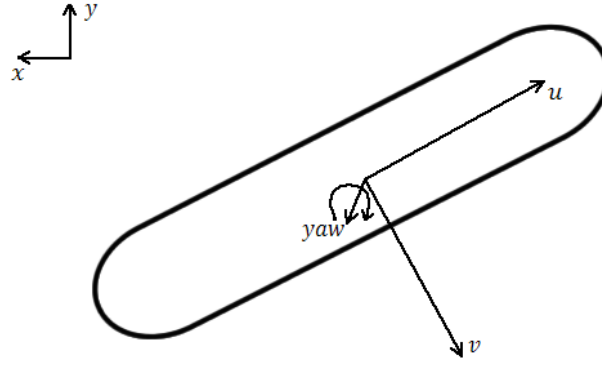


Figura 5.2 – Movimento horizontal do MARES

5.2.1 Redução da ordem do modelo

Para a determinação do controlador de velocidade horizontal, consideram-se apenas os movimentos segundo x_B , y_B e yaw . Os restantes movimentos são desprezados e as suas influências são consideradas como perturbações. Resultam as seguintes matrizes e vectores do modelo reduzido:

$$\begin{aligned}
 M_{RB} &= \begin{bmatrix} m & 0 & -my_G \\ 0 & m & mx_G \\ -my_G & mx_G & I_{zz} \end{bmatrix} & C_{RB}(v_r) &= \begin{bmatrix} 0 & -mr & -mx_G r \\ mr & 0 & -my_G r \\ mx_G r & my_G r & 0 \end{bmatrix} \\
 M_A &= - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{r}} \\ 0 & N_{\dot{v}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} & C_A(v_r) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{\dot{v}} v_r + Y_{\dot{p}} p_r + Y_{\dot{r}} r_r \\ 0 & 0 & -X_{\dot{u}} u_r - X_{\dot{q}} q_r \\ -Y_{\dot{v}} v_r - Y_{\dot{p}} p_r - Y_{\dot{r}} r_r & X_{\dot{u}} u_r + X_{\dot{q}} q_r & 0 \end{bmatrix} \\
 D_V(v_r) &= - \begin{bmatrix} X_{u|u}|u| & 0 & 0 \\ 0 & Y_{v|v}|v| & Y_{r|r}|r| \\ 0 & N_{v|v}|v| & N_{r|r}|r| \end{bmatrix} & g(\eta) &= \begin{bmatrix} (W - B) \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 P &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -y_{P1} & -y_{P2} \end{bmatrix} & f_p &= \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

5.2.2 Determinação do controlador

Deseja-se controlar a velocidade longitudinal u , ou velocidade segundo x_B , e a velocidade angular segundo yaw . Define-se o erro da velocidade como a diferença entre a velocidade relativa do veículo e a velocidade de referência:

$$\begin{aligned}
 e &= u_r - u_{ref} \\
 &= \begin{bmatrix} u - u_{ref} \\ v - v_{ref} \\ r - r_{ref} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u - u_{ref} \\ 0 \\ r - r_{ref} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde u_{ref} , v_{ref} e r_{ref} são as velocidades de referência segundo x_B , y_B e yaw .

Note-se que o erro da velocidade linear segundo y_B (e_v) é nulo. Tal facto acontece porque não se está interessado em controlar esta grandeza. Adicionalmente, não se consegue actuar directamente sobre a velocidade v , como se pode verificar pela matriz P em (5.19).

Define-se a candidata a função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} e^T e, \quad (5.21)$$

que, como se pode verificar é sempre positiva definida. Calculando a sua derivada, obtém-se facilmente

$$\dot{V} = e^T (\dot{v}_r - \dot{v}_{ref}). \quad (5.22)$$

Garante-se a estabilidade do sistema se a derivada da função de Lyapunov for negativa definida:

$$\dot{V} < 0. \quad (5.23)$$

Esta inequação implica que o segundo termo da expressão (5.22) seja negativo. Para tal, impõe-se

$$\dot{e} = \dot{v}_r - \dot{v}_{ref} < -k_e e \quad (5.24)$$

em que $k_e \in \mathbb{R}, k_e > 0$.

Define uma nova variável de erro α cujo valor se pretende levar para zero, tal que

$$\begin{aligned} \alpha &= \dot{v}_r - \dot{v}_{ref} + k_e e \\ \Downarrow \\ \dot{v}_r &= \alpha + \dot{v}_{ref} - k_e e. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pode-se reescrever a derivada da função de Lyapunov:

$$\dot{V} = e^T (\alpha - k_e e). \quad (5.26)$$

Substituindo \dot{v}_r na expressão da dinâmica do veículo (3.45), obtém-se, após manipulação algébrica,

$$\alpha = M^{-1} [-(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r - g(\eta) - M(\dot{v}_{ref} - k_e e) + P f_p]. \quad (5.27)$$

Para satisfazer a inequação (5.24), iguala-se a variável de entrada do sistema f_p como se mostra a seguir:

$$f_p = P^+[(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r + g(\eta) + M(\dot{v}_{ref} - k_e e)]. \quad (5.28)$$

Com esta escolha de f_p , a derivada da função de Lyapunov resulta

$$\dot{V} = -k_e e^T e, \quad (5.29)$$

sempre negativa definida, satisfazendo a condição de estabilidade do sistema.

5.2.3 Determinação do ganho

Tal como para o caso do controlador de velocidade vertical, deseja-se determinar um ganho k_e que permita uma resposta suficientemente rápida do sistema, com erro de regime permanente reduzido mas que evite a saturação prolongada dos propulsores. O valor que se obterá servirá como uma primeira aproximação do ganho desejado. Este deverá ser ajustado posteriormente em função do comportamento desejado do sistema. Começa-se por definir um valor de saturação do erro da velocidade longitudinal e_u . Tendo em conta que a velocidade linear u possui valores típicos de $1m/s$, arbitra-se um valor de saturação e_{umax} , tal que:

$$|e_u| = |u - u_{ref}| \leq e_{umax} = 0.5m/s. \quad (5.30)$$

O valor máximo da força de actuação dos propulsores, ou valor de saturação, está de acordo com o referido na secção anterior, na expressão (5.13): $F_{pmax} = 30N$. Assumindo que o veículo se encontra em repouso em relação ao fluido, que as forças de restabelecimento são desprezáveis, para efeito de cálculo, e que a derivada da velocidade de referência é nula, usando a expressão (5.28), obtém-se:

$$f_p = P^+[-k_e M e]. \quad (5.31)$$

Dada a matriz P em (5.19), sabe-se que o valor da força aplicada pelos propulsores no sentido positivo de x_B é máximo se $f_p = [F_{pmax}, F_{pmax}]^T$. Assim, considerando que o erro da velocidade longitudinal é máximo, em módulo, tem-se $e = [-e_{umax}, 0, 0]$, desprezando o erro segundo yaw . Calcula-se k_e usando a expressão (5.31):

$$\begin{aligned} k_e &= -e^+ M^{-1} P f_p \\ &= 3.56. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Deve-se saturar o erro de velocidade segundo yaw e_r de forma a evitar a saturação prolongada dos propulsores, quando este é elevado. Considera-se que o veículo está em repouso relativamente ao fluido. Conhecendo a matriz P , sabe-se que o valor do momento exercido pelos propulsores segundo yaw é máximo quando estes actuam com forças máximas, em módulo, e opostas:

$$f_p = \begin{bmatrix} F_{pmax} \\ -F_{pmax} \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Usando expressão (5.28), desprezam-se as forças e momentos de restabelecimento e calcula-se o valor de saturação do erro de velocidade segundo *yaw*, extraindo o terceiro elemento do vector de erro:

$$\begin{aligned} e &= -k_e^{-1} M^{-1} P f_p \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.64 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Obtém-se o valor de saturação do erro de velocidade segundo *yaw* tal que

$$|e_r| = |r - r_{ref}| \leq e_{rmax} = 1.64 \cdot 10^{-1} rad/s. \quad (5.35)$$

5.3 Controlador de posição vertical (1)

Na secção 5.1, determinou-se um controlador de velocidade vertical que permite impor ao sistema uma referência de velocidade segundo z_B , w_{ref} , e uma velocidade de referência segundo *pitch*, q_{ref} . Porém, esse controlador apenas terá utilidade neste trabalho no caso em que existe um controlador de posição que gera as referências referidas. Este caso será explorado mais tarde. Nesta secção, propõe-se uma alternativa a este método. O controlador que será desenvolvido terá como referências a profundidade e o ângulo *pitch* formado com o plano horizontal. Recorre-se aqui, uma vez mais, à teoria de Lyapunov e às técnicas de *Backstepping*.

5.3.1 Redução da ordem do modelo e cinemática

De forma a facilitar a manipulação das expressões da dinâmica, realiza-se uma redução de ordem do modelo eliminando linhas e colunas cuja influência no movimento vertical é desprezável. À semelhança da subsecção 5.1.1, apenas se consideram os movimentos segundo x_B , z_B e *pitch*, pelo que resultam as matrizes e vectores apresentados nas expressões em (5.1).

Dado que apenas se consideram os movimentos segundo os eixos acima referidos, pode-se definir uma matriz de rotação de ordem reduzida. Pretende-se que esta relacione um vector no referencial reduzido do veículo com o referencial inercial reduzido fixo à Terra, tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = J(\eta) \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Assim, resulta a matriz de rotação usada neste controlador:

$$J(\eta) = J(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Sabendo que as velocidades de rotação do veículo segundo *pitch* são iguais nos referenciais inercial e fixo ao veículo, $\dot{\theta} = q$, é possível definir uma matriz dependente da velocidade de rotação tal que:

$$\dot{J}(\theta) = S(q) \cdot J(\theta), \quad (5.38)$$

e

$$\dot{J}^T = -S(q) \cdot J^T(\theta). \quad (5.39)$$

em que $S(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é dada por

$$S(q) = \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Esta matriz é *skew-symmetric*, isto é $S^T(q) = -S(q)$. Tal característica será útil na simplificação de algumas expressões como se verá na subsecção seguinte.

Doravante, usar-se-á a seguinte nomenclatura:

$$J = J(\theta); \quad (5.41)$$

$$S = S(q). \quad (5.42)$$

5.3.2 Determinação do controlador

Na determinação deste controlador, é interessante definir as referências de posição z_{ref} e θ_{ref} no referencial inercial fixo à terra, contrariamente aos controladores de velocidade em que as referências eram dadas no referencial do veículo. No entanto, o vector de erro deverá ser dado no referencial do veículo, pelo que se define da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e &= J^T(\eta - \eta_{ref}) \\ &= J^T \begin{bmatrix} x - x_{ref} \\ z - z_{ref} \\ \theta - \theta_{ref} \end{bmatrix} \\ &= J^T \begin{bmatrix} 0 \\ z - z_{ref} \\ \theta - \theta_{ref} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Note-se que não se está interessado em controlar a posição x , pelo que se iguala esta componente do erro a zero:

$$x_{ref} = x. \quad (5.44)$$

Assim, a primeira linha da derivada da posição de referência deve ser dada pela selecção da primeira linha de $J \cdot v_r$:

$$\dot{\eta}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{z}_{ref} \\ \dot{\theta}_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot J \cdot v_r. \quad (5.45)$$

Da mesma forma, para a segunda derivada da posição de referência, tem-se

$$\ddot{\eta}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{z}_{ref} \\ \ddot{\theta}_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (S \cdot J \cdot v_r + J \cdot \dot{v}_r). \quad (5.46)$$

Define-se a candidata a função de Lyapunov, como se mostra a seguir:

$$V_1 = \frac{1}{2} e^T e. \quad (5.47)$$

A sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e^T [-S J^T (\eta - \eta_{ref}) + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})] \\ &= e^T [-S e + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Usando o facto de S ser uma matriz *skew-symmetric*, sabe-se que $e^T S e = 0$, pelo que resulta:

$$\dot{V}_1 = e^T J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref}). \quad (5.49)$$

A estabilidade do sistema implica que a derivada da função de Lyapunov seja negativa definida, pelo que se impõe:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 < 0 &\quad \Rightarrow \quad J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref}) < -k_e e \\ &\quad \quad \quad v_r - J^T \eta_{ref} < -k_e e, \end{aligned} \quad (5.50)$$

em que $k_e \in \mathbb{R}$, $k_e > 0$.

Define-se uma nova variável de erro α_1 que se deseja levar para zero

$$\alpha_1 = v_r - J^T \dot{\eta}_{ref} + k_e e. \quad (5.51)$$

Manipulando esta expressão algebricamente, tem-se:

$$v_r = \alpha_1 + J^T \dot{\eta}_{ref} - k_e e. \quad (5.52)$$

Recordando a expressão da dinâmica do veículo em (3.45),

$$M \dot{v}_r = -(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r - g(\eta) + P f_p. \quad (5.53)$$

e substituindo v_r nesta expressão por (5.52), obtém-se, após manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} M \dot{\alpha}_1 = & -(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot (\alpha_1 + J^T \dot{\eta}_{ref} - k_e e) - g(\eta) + P f_p \\ & - M \left[-S J^T \dot{\eta}_{ref} + J^T \ddot{\eta}_{ref} - k_e (-S e + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})) \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Pela análise da expressão anterior pode-se constatar que é impossível alterar instantaneamente o valor do vector α_1 . Adicionalmente, sem ganho proporcional do erro α_1 na variável de controlo f_p , em alguns casos, é impossível levar α_1 para zero.

Demonstração

Assuma-se que a variável de controlo é dada por

$$\begin{aligned} f_p &= P^+ [-M \dot{\alpha}_1 + P f_p] \\ &= P^+ \left[(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot (\alpha_1 + J^T \dot{\eta}_{ref} - k_e e) + g(\eta) \right. \\ &\quad \left. + M \left[-S J^T \dot{\eta}_{ref} + J^T \ddot{\eta}_{ref} - k_e (-S e + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})) \right] \right]. \end{aligned}$$

Considere-se o caso particular em que $|\alpha_1| > 0$, $v_r = 0$, $\dot{\eta}_{ref} = 0$, $\ddot{\eta}_{ref} = 0$ e $\frac{d}{dt}(J^T e) = (-S e + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})) = 0$, $\forall e \in \mathbb{R}^3$. Com estas considerações resultaria

$$M \dot{\alpha}_1 = 0.$$

Sabendo que M é constante, tem-se a variável de erro α_1 constante. ■

Assim, define-se uma nova variável de erro que se pretende também levar para zero

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \delta, \quad (5.55)$$

em que $\delta \in \mathbb{R}^3$ é um vector constante com termos arbitrariamente pequenos (em módulo). Esta variável é referida como um vector de *design* por (Aguilar, et al., 2006). Esta poderá ser usada para definir o sinal do erro em regime permanente.

Define-se também a função de Lyapunov aumentada (ver secção 2.7):

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \alpha_2^T M \alpha_2, \quad (5.56)$$

cuja derivada se apresenta a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \alpha_2^T M \dot{\alpha}_2 \\ &= e^T \alpha_2 + e^T \delta - k_e e^T e + \alpha_2^T M \dot{\alpha}_2. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Substituindo (5.55) em (5.54) e manipulando a expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} M \dot{\alpha}_2 &= -(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot (\alpha_2 + \delta + J^T \dot{\eta}_{ref} - k_e e) - g(\eta) + P f_p \\ &\quad - M \left[-S J^T \dot{\eta}_{ref} + J^T \ddot{\eta}_{ref} - k_e (-S e + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})) - \dot{\delta} \right]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Com o objectivo de tornar \dot{V}_2 uma função negativa definida, escolhe-se a variável de controlo f_p tal que

$$\begin{aligned} f_p &= P^+ \left[(C_{RB}(v_r) + C_A(v_r) + D_V(v_r)) \cdot v_r + g(\eta) \right. \\ &\quad + M \left[-S J^T \dot{\eta}_{ref} + J^T \ddot{\eta}_{ref} - k_e (-S e + J^T (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{ref})) - \dot{\delta} \right] - e \\ &\quad \left. - k_{\alpha_2} [v_r - J^T \dot{\eta}_{ref} + k_e e - \delta] \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Esta escolha permite reescrever a expressão (5.57):

$$\dot{V}_2 = e^T \delta - k_e e^T e - k_{\alpha_2} \alpha_2^T \alpha_2. \quad (5.60)$$

Pela análise desta expressão, \dot{V}_2 poderá não ser sempre negativa definida. Dado que δ é um vector de *design* com valores arbitrários em função do erro que se deseja obter em regime permanente. Por outro lado, se a instabilidade do sistema, provocada por δ , leva o erro e a divergir de zero, \dot{V}_2 tornar-se-á negativa por consequente.

5.3.3 Determinação dos ganhos

Sabendo que a força máxima dos propulsores dada na expressão (5.13) é $F_{pmax} \approx 30N$, pretende-se determinar os ganhos k_e e k_{α_2} evitando a saturação da actuação. O erro de profundidade e_z deve ser limitado inferior e superiormente, de forma a calcular os ganhos do controlador. Arbitra-se um valor de saturação tal que

$$|e_z| \leq e_{zmax} = 2 \text{ m}. \quad (5.61)$$

Considere-se o movimento na vertical, com estado inicial $v_r = [0_{6 \times 1}]$ (veículo imóvel em relação ao fluido) e um erro de profundidade no seu valor de saturação inferior, $e_z = -e_{zmax} =$

$-2m$ (movimento no sentido positivo de z). Considera-se um erro de ângulo *pitch* nulo e_θ , assim como a primeira e segunda derivada em ordem ao tempo da posição desejada, $\dot{\eta}_{ref}$ e $\ddot{\eta}_{ref}$, nulas, para efeito de cálculo. Assume que o ângulo *pitch* é nulo, pelo que $J = I_{3 \times 3}$. Recorrendo à expressão (5.59), desprezando as forças e momentos de restabelecimento, obtém-se

$$f_p = P^+ \left[-e - k_{\alpha_2} [k_e e - \delta] \right]. \quad (5.62)$$

Assumindo que $\delta \approx 0$ de modo a satisfazer as condições de estabilidade do sistema (5.60), deduz-se facilmente

$$k_e k_{\alpha_2} = -e^+ [P f_p + e]. \quad (5.63)$$

Com o objectivo de obter os valores mais elevados dos ganhos, obtendo assim uma dinâmica rápida do sistema, faz-se $f_p = [F_{pmax}, F_{pmax}]^T$. Obtém-se

$$k_e k_{\alpha_2} = 2.90 \cdot 10^1. \quad (5.64)$$

Note-se que, analisando a expressão (5.59), o ganho k_e pode ser interpretado como um ganho derivativo do erro. Já o ganho k_{α_2} pode ser interpretado como um ganho proporcional. O aumento do valor de k_e traduzir-se-ia numa maior rejeição da variação do erro. O aumento de k_{α_2} traduzir-se-ia num erro de regime permanente menor. Existe um compromisso entre estes dois ganhos mas a sua determinação teórica presumiria a assumpção de várias características de comportamento do erro. Estas podem ser inexactas sem o recurso à prática, pelo que se determinarão os ganhos depois de implementar o controlador. Assim, na implementação do controlador, o valor de cada um dos ganhos deve ser obtido tendo em conta factores como a variação máxima da referência, isto é, o valor máximo da derivada em ordem ao tempo da referência.

Estando o produto dos ganhos calculado, determina-se o valor de saturação do erro segundo *pitch*. Para efeito de cálculo, assume-se que o veículo está imóvel em relação ao fluido e que o erro é dado por

$$e = J^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{\theta max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{\theta max} \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

em que $e_{\theta max}$ é o valor de saturação do erro segundo *pitch*. Recordar-se que

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -x_{p3} & -x_{p4} \end{bmatrix}, \quad (5.66)$$

e que $x_{p3} \approx -x_{p4}$. Pelo exposto, os propulsores devem realizar o momento máximo para o vector de erro apresentado acima, ou seja $f_p \approx [F_{pmax}; -F_{pmax}]$. Considerando $\delta \approx 0$, usa-se a expressão (5.62) para obter o valor de saturação do erro

$$\begin{aligned} e &= -(1 + k_{\alpha_2} k_e)^{-1} P f_p \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.55 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Extraindo a terceira linha do erro, obtém-se $e_{\theta_{max}} = 8.55 \cdot 10^{-1} \text{ rad}$.

5.4 Controlador de posição vertical (2)

Contrariamente à secção anterior, desenvolver-se-á um controlador que recorre ao controlador de velocidade vertical desenvolvido na secção 5.1. Será determinado um controlador com ganhos proporcional e integral de forma a obter um erro nulo em regime permanente. Através deste serão geradas dinamicamente as referências de velocidades (w_{ref} e q_{ref}) que serão aplicadas ao controlador de velocidade. A arquitectura descrita é ilustrada na figura a seguir.

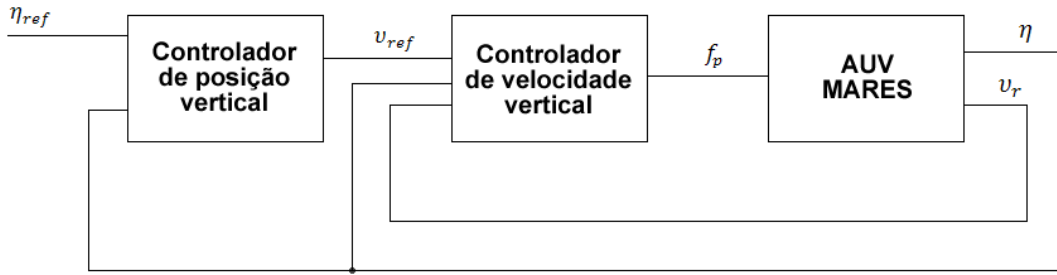


Figura 5.3 - Arquitectura do controlador de posição vertical

Pelo exposto na secção 5.1, assume-se que se pode definir as referências w_{ref} e q_{ref} actuando nas velocidades segundo z_B e $pitch$ independentemente. Na verdade, estas velocidades estão acopladas tanto pela dinâmica do veículo (cf. expressões (3.46)-(3.51)) como pelos limites de actuação dos propulsores. Um cenário para a exemplificação deste último facto é o movimento do veículo à velocidade vertical máxima com ângulo $pitch$ nulo. Devido às assimetrias, o propulsor $P3$ estará saturado e o propulsor $P4$ estará próximo do seu valor de saturação. Isto implica que a controlabilidade segundo $pitch$ esteja reduzida nesta situação. Porém, para a determinação deste controlador, considerar-se-á que estes movimentos estão desacoplados.

5.4.1 Determinação do controlador

Considere-se a figura a seguir. Deseja-se que o veículo atinja uma profundidade z_{ref} e um ângulo $pitch$ com o plano horizontal θ_{ref} .

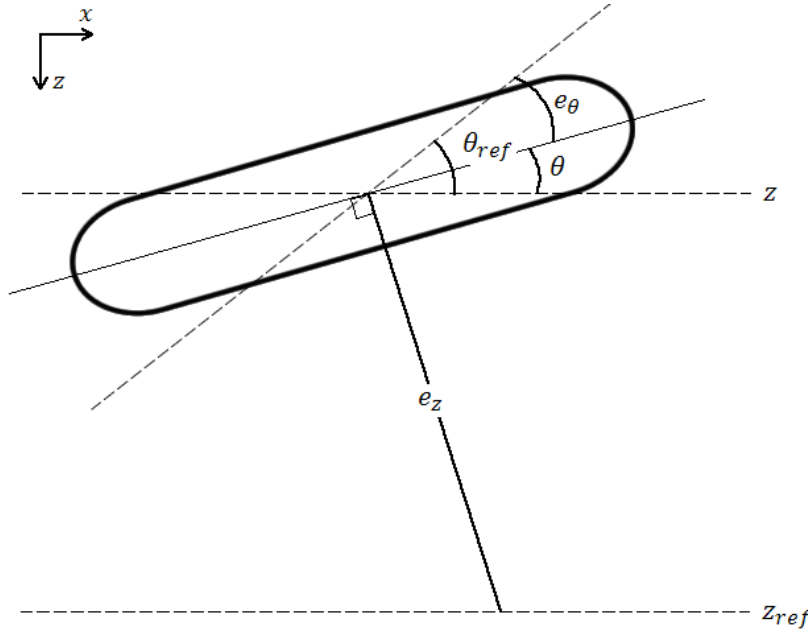


Figura 5.4 - Posição vertical do veículo e respectivas referências.

Para a determinação deste controlador, começa-se por definir os erros de posição no plano vertical, tal como mostra a seguir:

$$e_z = \frac{1}{\cos \theta} (z - z_{ref}), \quad (5.68)$$

$$e_\theta = \theta - \theta_{ref}. \quad (5.69)$$

Estas expressões permitem definir um controlador de posição com ganhos proporcionais e integrais. Na verdade este é constituído por um controlador de profundidade e um controlador de ângulo *pitch* que geram as referências de velocidades w_{ref} e q_{ref} . Apresentam-se as expressões de controlo a seguir

$$w_{ref} = -K_{pz} e_z - K_{iz} \int e_z dt, \quad (5.70)$$

$$q_{ref} = -K_{p\theta} e_\theta - K_{i\theta} \int e_\theta dt. \quad (5.71)$$

em que $K_{pz}, K_{iz}, K_{p\theta}, K_{i\theta} \in \mathbb{R}^+$ são os ganhos proporcional e integral do erro de profundidade e os ganhos proporcional e integral do erro do ângulo *pitch*, respectivamente. Estes serão determinados na subsecção a seguir.

Com a determinação deste controlador, deseja-se obter um comportamento invariável e independente dos valores dos erros. Ora, a acção integral das expressões de controlo (5.70) e (5.71) é indirectamente dependente do erro. Para ilustrar esta ideia, considere-se um erro constante cujo valor leva à saturação dos propulsores durante algum tempo. A velocidade do veículo terá atingido o seu máximo no movimento segundo z_B e a actuação dos propulsores continuará a estar saturada. Quanto maior for o valor do erro, maior será a componente integral

das expressões referidas atrás, devido ao tempo decorrido e ao valor do erro. Este comportamento pode ser alterado recorrendo à saturação do erro e à activação da componente integral apenas quando o erro não se encontra no seu valor de saturação. Adicionalmente, é necessário prever o reinício do valor do integral aquando da saturação do erro:

$$\int e \, dt = 0, \quad |e| > e_{max}. \quad (5.72)$$

5.4.2 Determinação dos ganhos e das saturações dos erros

Controlador de profundidade

Começa-se por arbitrar um valor de saturação do erro de profundidade tal que

$$|e_z| \leq e_{zmax} = 2m. \quad (5.73)$$

No Capítulo 4, determinaram-se valores máximos de velocidade segundo os vários eixos. A velocidade máxima obtida no movimento segundo z_B é $w_{max} = 0.72m/s$ (expressão (4.11)). O ganho proporcional deve ser calculado de forma a evitar a saturação prolongada dos propulsores. No entanto, deseja-se obter uma resposta rápida, pelo que, ao erro máximo (valor de saturação, em módulo), deve corresponder a velocidade de referência máxima (em módulo), na saída deste controlador. Tendo em conta o exposto na subsecção anterior, a acção integral é nula enquanto o erro for saturado, pelo que se despreza no cálculo de K_{pz} . Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} w_{max} &= K_{pz} e_{zmax} \\ \Downarrow \\ K_{pz} &= \frac{w_{max}}{e_{zmax}} = 3.61 \cdot 10^{-1} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Dada a não linearidade da dinâmica do sistema, é difícil prever a evolução da posição vertical ao longo do tempo, pelo que se assume que, quando aplicada a lei de controlo em (5.70), o módulo do erro decresce linearmente. Esta aproximação é realizada apenas para efeito de cálculo de K_{iz} . Para garantir a estabilidade do sistema, obedece-se à seguinte condição:

$$\left| K_{iz} \int e_z \, dt \right| \leq \left| \frac{1}{3} K_{pz} e_z \right|, \quad (5.75)$$

ou seja, tenta-se garantir que a componente integral não é superior a um terço da acção proporcional, em módulo. No caso em que a componente integral é maior que a componente proporcional, a resposta do sistema pode vir a ter uma sobreelongação elevada ou até tornar-se instável.

Considerando que e_z é positivo e que o veículo se desloca à velocidade máxima segundo z_B , tem-se

$$K_{iz} \int_0^{\frac{e_{max}}{w_{max}}} e_z dt \leq K_{iz} \int_0^{\frac{e_{max}}{w_{max}}} (e_{zmax} - w_{max} t) dt \quad (5.76)$$

cuja resolução permite obter $K_{iz} = 8.67 \cdot 10^{-2}$.

Controlador de ângulo segundo *pitch*

Tal como para o caso do erro de profundidade, satura-se o erro do ângulo segundo *pitch*, e_θ , de forma a evitar a saturação prolongado dos propulsores. Arbitra-se um valor de saturação tal que

$$|e_\theta| \leq e_{\theta max} = \pi/8. \quad (5.77)$$

Deseja-se que os propulsores exerçam um momento máximo (em módulo) segundo *pitch* quando o valor do erro está saturado, no sentido de fazer diminuir rapidamente o erro. Para tal, é necessário que o controlador de velocidade vertical tenha uma referência de velocidade próxima do valor máximo de velocidade atingível pelo veículo, q_{max} . Pelo exposto no Capítulo 4, na expressão (4.16), sabe-se que $q_{max} = 1.28 \cdot 10^0 \text{ rad/s}$. Assim, desprezando a componente integral do controlo em (5.71), obtém-se

$$q_{max} \geq K_{p\theta} e_{\theta max}. \quad (5.78)$$

De modo a obter uma resposta rápida, o conclui-se facilmente que $K_{p\theta} = 3.20 \cdot 10^0$.

Do mesmo modo que para o controlo de profundidade, é difícil prever a evolução do erro ao longo do tempo, dada a não-linearidade do sistema. Considera-se assim que o erro decresce linearmente, em módulo, com a aplicação das referências dadas pelo controlador. Tal assumption permite calcular o valor do ganho integral como se apresenta a seguir

$$K_{i\theta} \int e_\theta dt \leq \frac{1}{3} K_{p\theta} e_{\theta max}, \quad (5.79)$$

que, considerando uma variação linear ao longo do tempo, resulta

$$K_{i\theta} \int_0^{e_{\theta max}/q_{max}} (e_{\theta max} - q_{max} t) dt \leq \frac{1}{3} K_{p\theta} e_{\theta max}. \quad (5.80)$$

A resolução desta última expressão permite obter $K_{i\theta} \leq 6.82 \cdot 10^0$.

Considerações sobre os controladores

Os ganhos calculados nesta subsecção implicam algumas assumptiones. Estas poderão ser pouco realistas, pelo que o recurso à prática após implementação dos controladores é essencial para ajustar os valores aqui obtidos, obedecendo a alguns critérios tais como a rapidez da

resposta, a sua sobreelongação e até a tolerância a ruído. No entanto, estes valores servem de referências iniciais numa primeira abordagem.

Na tabela a seguir, como forma de resumo, mostram-se os resultados obtidos nesta secção.

Tabela 5.1 - Valores de saturação dos erros do controlador de posição vertical (2)

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
e_{zmax}	2	m	Saturação do erro de profundidade
$e_{\theta max}$	$\pi/8$	rad	Saturação do erro de ângulo segundo <i>pitch</i>

Tabela 5.2 - Valores dos ganhos do controlador de posição vertical (2)

Parâmetro	Valor	Descrição
K_{pz}	$3.61 \cdot 10^{-1}$	Ganho proporcional de profundidade
K_{iz}	$8.67 \cdot 10^{-2}$	Ganho integral de profundidade
$K_{p\theta}$	$3.20 \cdot 10^0$	Ganho proporcional do ângulo <i>pitch</i>
$K_{i\theta}$	$6.82 \cdot 10^0$	Ganho integral do ângulo <i>pitch</i>

5.5 Controlador de seguimento de recta

O controlador que será desenvolvido nesta secção permitirá que o veículo siga uma recta imaginária. Esta será definida por dois pontos no plano horizontal. O seguimento desta linha é independente do movimento vertical, pelo que o seguimento poderá ser realizado em simultâneo com o mergulho do MARES, por exemplo. O controlador deverá gerar referências de velocidade horizontal para a entrada do controlador de velocidade horizontal determinado na secção 5.2.

No seguimento de uma recta no espaço, deve-se definir a velocidade longitudinal desejada (de referência) em relação ao fluido. Esta não será gerada pelo controlador de forma a poder ser alterada dinamicamente ao longo da trajectória. Será portanto uma variável de entrada do sistema de controlo cujo valor é atribuído directamente à entrada do controlador de velocidade. Os pontos da recta são entradas do controlador de posição horizontal. A arquitectura de controlo é ilustrada na figura a seguir.

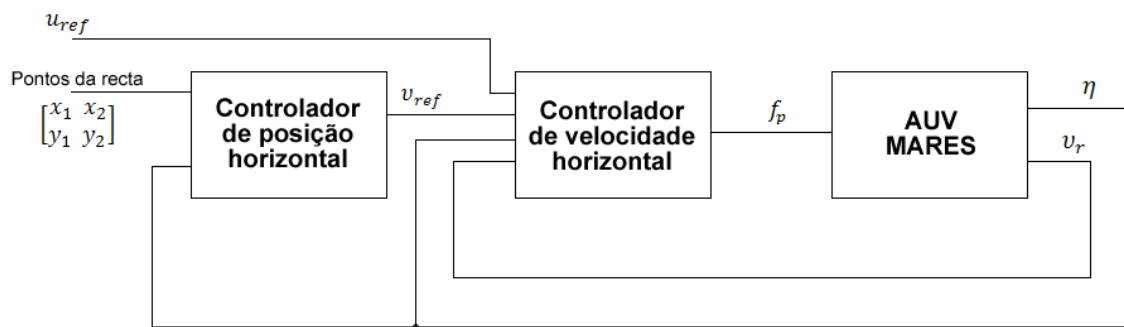


Figura 5.5 - Arquitectura do controlo de posição horizontal

De forma a garantir uma resposta com elevada dinâmica para rectas com qualquer ângulo e a qualquer distância do veículo, é necessário determinar um controlador de aproximação e um controlador de proximidade. O primeiro tem como função aproximar o veículo da recta enquanto o segundo deve levar o erro de distância à recta para zero, em regime permanente. A comutação entre estes controladores deve ser realizada em função da distância. Para evitar que a

comutação possa ocorrer repetidamente, é necessário que a selecção do controlador seja feita recorrendo à histerese. De forma a ilustrar esta ideia, considere-se o cenário em que o veículo se aproxima da recta e atinge uma distância tal que o controlador de proximidade entra em funcionamento. Durante manobra realizada o veículo é arrastado, devido à corrente, para uma distância em que se comuta para o controlador de aproximação à recta. Este comportamento pode repetir-se sem nunca anular a distância à recta, pelo que se recorre à histerese.

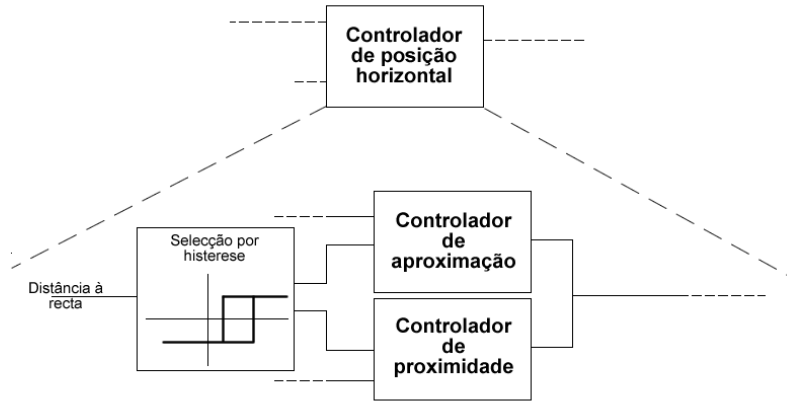


Figura 5.6 - Estrutura do controlador de posição horizontal

Arbitram-se os valores de histerese $h_{min} = 5m$ e $h_{max} = 10m$. Assim, o controlador de proximidade entrará em funcionamento quando a distância à recta for inferior a h_{min} e sairá apenas quando a distância for superior a h_{max} . A entrada em funcionamento do controlador de aproximação é complementar.

5.5.1 Determinação do controlador

Controlador de aproximação

Impondo uma velocidade longitudinal u_{ref} ao veículo, é necessário que a sua orientação (*yaw*) permita que se aproxime da recta. A distância mínima que separa o veículo da recta que se pretende seguir é dada pelo comprimento do segmento que intersecta o veículo e é perpendicular à recta. A aproximação à recta será feita seguindo a perpendicular a esta, que passa no ponto (x, y) (posição do veículo). Define-se a equação da recta tal que

$$y_r = mx + b, \quad (5.81)$$

em que $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ e $b = y_1 - mx_1$.

Assumindo que a velocidade longitudinal do veículo é positiva ($u > 0$), de modo a facilitar a análise, o ângulo do segmento de recta perpendicular à recta que se pretende seguir é dado por

$$\psi_p = \begin{cases} \psi_{ref} - \frac{\pi}{2}, & y > y_r \\ \psi_{ref} + \frac{\pi}{2}, & y < y_r \end{cases} \quad (5.82)$$

Define-se o erro como a diferença de ângulo entre o ângulo *yaw* do veículo, ψ , e o ângulo da perpendicular à recta:

$$e_\psi = \psi - \psi_p. \quad (5.83)$$

Ilustra-se os conceitos descritos para a aproximação à recta na figura a seguir.

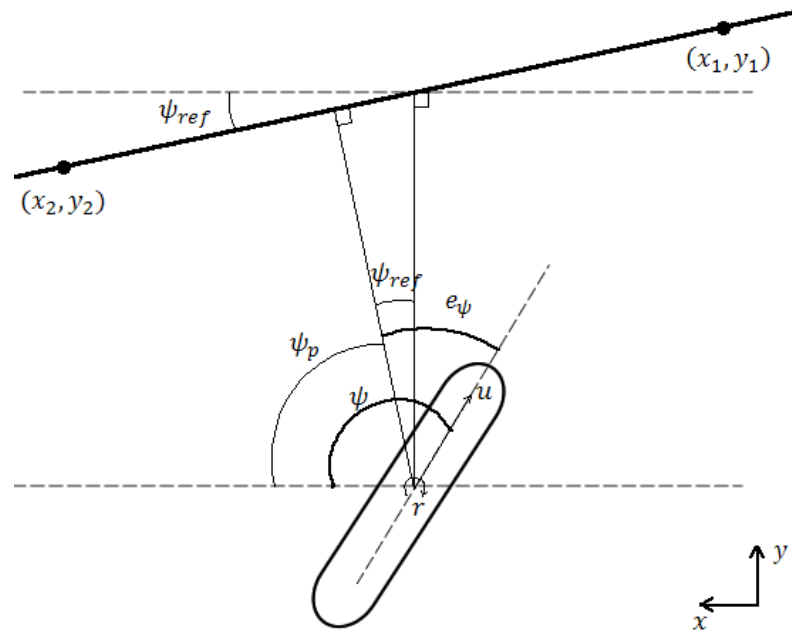


Figura 5.7 - Aproximação à recta com controlador de aproximação

Dado que não se pretende um erro nulo em regime permanente, o controlador possuirá apenas um ganho proporcional de modo a gerar a referência de velocidade angular segundo *yaw*

$$r_{ref} = -K_{p\psi} e_\psi. \quad (5.84)$$

Controlador de proximidade

Com este controlador pretende-se obter uma distância nula à recta, em regime permanente. Para o conseguir é necessário introduzir um ganho proporcional e integral do erro de distância e_d . A manobra de seguimento da recta é ilustrada na figura 5.8. Define-se o erro da distância como se segue:

$$\begin{aligned} e_d &= -(y - y_{ref}) \cos(\pi - \psi_{ref}) \\ &= (y - y_{ref}) \cos(\psi_{ref}). \end{aligned} \quad (5.85)$$

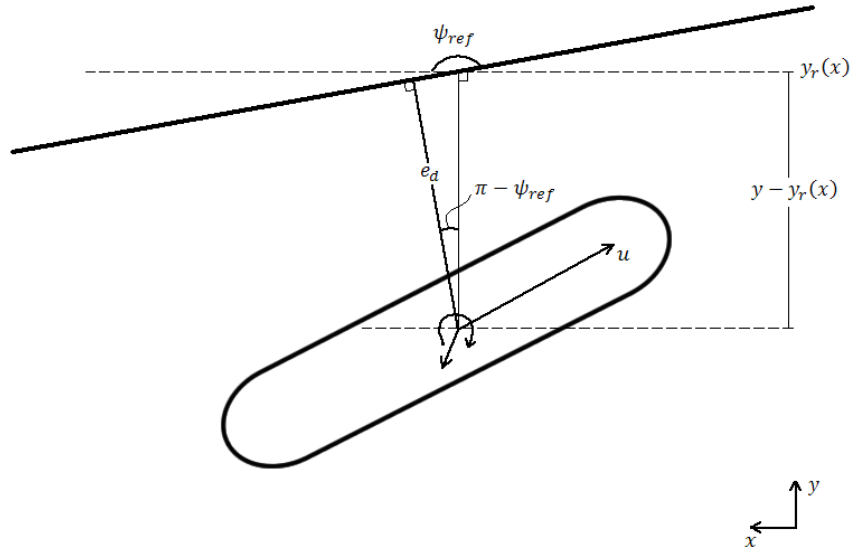


Figura 5.8 - Seguimento de uma recta com ângulo ψ_{ref}

De forma a definir o sentido de seguimento da recta, é também necessário adicionar um ganho proporcional do erro de ângulo formado entre o veículo e a recta. Redefine-se o erro de ângulo calculado para o controlador de aproximação como se mostra a seguir:

$$e_{\psi} = \psi - \psi_{ref}. \quad (5.86)$$

A expressão de controlo vem, para um erro de distância nulo em regime permanente,

$$r_{ref} = -K_{p\psi} e_{\psi} - K_{pd} e_d - K_{id} \int e_d dt. \quad (5.87)$$

em que $K_{p\psi}$ é o ganho proporcional do erro de ângulo, cujo valor é igual ao determinado para o controlador de aproximação.

Sempre que existir comutação para o controlador de aproximação, a integração do erro em (5.87) deve ser suspensa e reiniciada ($\int e_d dt = 0$).

5.5.2 Determinação dos ganhos

Controlador de aproximação

Pela análise da figura 5.7, facilmente se deduz que $|e_{\psi}| < \pi$, depois de normalizado. Tendo este facto em conta e recorrendo à expressão (5.84), pode-se determinar o valor do ganho proporcional, de forma a evitar a saturação prolongada dos propulsores, como se mostra a seguir:

$$K_{p\psi} = \frac{r_{max}}{e_{\psi max}}, \quad (5.88)$$

em que $r_{max} = 7.20 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$ é o valor máximo da velocidade segundo yaw deduzido no Capítulo 4 e $e_{\psi max} = \pi$ é o valor máximo do erro. Assim, resulta $K_{p\psi} = 2.30 \cdot 10^{-1}$.

Controlador de proximidade

Para garantir que o veículo segue a recta no sentido definido pelo ângulo ψ_{ref} , é necessário que o termo $K_{pd} e_d$ seja menor que $K_{p\psi} e_{\psi}$. Assim, arbitra-se

$$|K_{pd} e_{dmax}| \leq \frac{1}{5} |K_{p\psi} e_{\psi max}|, \quad (5.89)$$

em que $e_{dmax} = h_{min}$ é o valor da distância à recta aquando da entrada em funcionamento do controlador de proximidade. Empiricamente, é possível deduzir que a dinâmica do sistema é tanto mais rápida quanto mais elevado for o valor de K_{pd} , pelo que resulta $K_{pd} = 2.89 \cdot 10^{-2}$.

Para efeito de cálculo de K_{id} , considera-se linear a evolução decrescente do erro. A componente integral do erro de distância deve ser menor que a componente proporcional na expressão de controlo na expressão (5.87), com o objectivo de atingir a estabilidade. De modo a obedecer a este critério, arbitra-se

$$\left| K_{id} \int e_d dt \right| = \frac{1}{5} |K_{pd} e_{dmax}|, \quad (5.90)$$

que, dada a evolução linear do erro até zero, resulta

$$K_{id} \int_0^{\frac{e_{dmax}}{u \cos(e_{\psi})}} (e_{dmax} - u \cos(e_{\psi}) t) dt = \frac{1}{5} K_{pd} e_{dmax}. \quad (5.91)$$

Assumindo que a aproximação da recta é realizada com um ângulo constante tal que $|e_{\psi}| = \pi/4$ entre o ângulo do veículo e o ângulo da recta, vem

$$K_{id} = \frac{1}{5} K_{pd} \frac{u\sqrt{2}}{e_{dmax}}. \quad (5.92)$$

Trajectórias iguais para velocidades longitudinais diferentes

Seria interessante se o veículo descrevesse a mesma trajectória (em relação ao fluido) aquando do seguimento da linha independentemente da velocidade a que se desloca. A trajectória descrita pelo veículo na posição (x, y) num intervalo de tempo infinitesimal pode ser considerada como um arco de circunferência com raio de curvatura $r_c(x, y)$. Se este raio de curvatura for igual para qualquer velocidade, isto é

$$r_c(x, y)|_{u=u_1} = r_c(x, y)|_{u=u_2}, \quad (5.93)$$

com $u_1 \neq u_2$, então a trajectória será invariável, desde que possuam o mesmo ponto inicial. A figura 5.9 ilustra os conceitos apresentados.

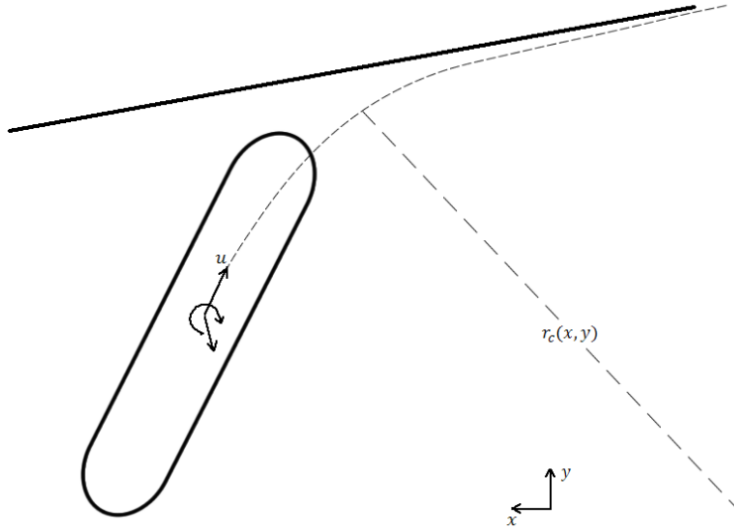


Figura 5.9 - Trajectória descrita pelo veículo no seguimento da recta

Tendo em conta o exposto e desprezando a velocidade transversal v , pode-se escrever

$$r_c(x, y) = \frac{u_1(t)}{r_1(t)} = \frac{u_2(t)}{r_2(t)}. \quad (5.94)$$

em que r_1 e r_2 são as velocidades de rotação segundo *yaw* nas trajectórias com velocidades lineares u_1 e u_2 , respectivamente. Assim, recorrendo à expressão de controlo (5.87), tendo calculado os ganhos para a velocidade $u = u_1$, obtém-se

$$r_{ref}|_{u=u_1} = -K_{p\psi} e_\psi - K_{pd} e_d - K_{id} \int e_d dt, \quad (5.95)$$

sendo a expressão de controlo para outras velocidades dada por

$$r_{ref}|_{u=u_2} = -K'_{p\psi} e_\psi - K'_{pd} e_d - K'_{id} \int e_d dt, \quad (5.96)$$

em que, recorrendo a (5.92) e a (5.94),

$$K'_{p\psi} = \frac{u_2}{u_1} K_{p\psi} ; \quad K'_{pd} = \frac{u_2}{u_1} K_{pd} ; \quad K'_{id} = \frac{u_2^2 \sqrt{2}}{5 u_1 e_{dmax}} K_{pd} . \quad (5.97)$$

Nas tabelas a seguir, apresentam-se os valores de saturação dos erros e os valores dos ganhos para uma velocidade longitudinal constante $u = 1m/s$.

Tabela 5.3 - Valores de saturação dos erros do controlador de seguimento de recta

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
e_{dmax}	5	m	Saturação do erro de profundidade
$e_{\psi max}$	π	rad	Saturação do erro de ângulo segundo yaw

Tabela 5.4 – Ganhos do controlador de seguimento de recta

Parâmetro	Valor	Descrição
$K_{p\psi}$	$2.30 \cdot 10^{-1}$	Ganho proporcional do ângulo formado entre o veículo e a recta
K_{pd}	$2.89 \cdot 10^{-2}$	Ganho proporcional do erro da distância
K_{id}	$1.64 \cdot 10^{-3}$	Ganho integral do erro da distância

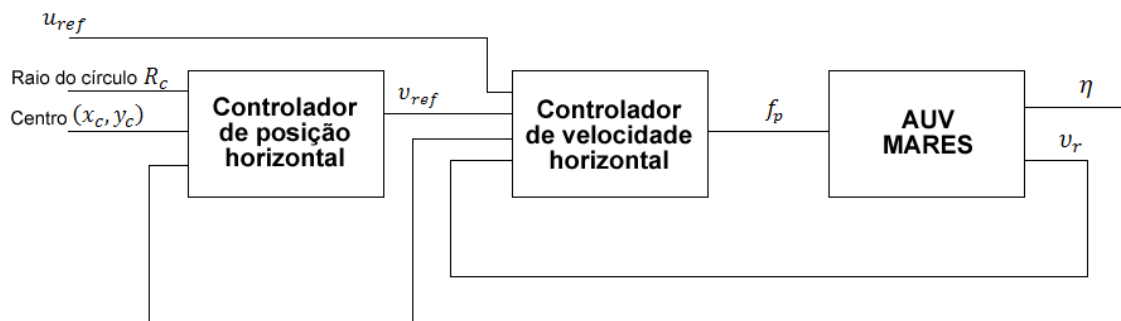
Os valores dos ganhos obtidos servem como uma primeira abordagem. Estes devem ser ajustados recorrendo à prática de modo a obter comportamentos que obedeçam a determinados critérios tais como a rapidez de resposta, por exemplo.

Durante o seguimento, o veículo poderá possuir um ângulo ψ diferente do da recta, ψ_{ref} , em regime permanente. Este comportamento dever-se-á à existência de corrente com uma velocidade diferente de zero que é compensada com uma diferença de ângulo entre o veículo e a recta, mantendo assim um erro de distância próximo de zero.

5.6 Controlador de seguimento de circunferência

Nesta secção apresenta-se um controlador que permite o seguimento de um círculo imaginário definido pelas coordenadas do seu centro (x_c, y_c) , no plano horizontal, e pelo seu raio r_c . Este seguimento é independente da profundidade. Este seguimento poderá ser realizado em simultâneo com o mergulho do veículo. Isto permite descrever trajectórias na superfície circular de um cilindro com altura indeterminada. A velocidade longitudinal de referência u_{ref} é definida independentemente.

A arquitectura deste controlador é muito semelhante à do controlador para o seguimento de uma recta. A diferença reside apenas nas suas variáveis de referência (entradas), como se mostra na figura 5.10. Este controlador gera as referências de velocidade para o controlador de velocidade horizontal determinado na secção 5.2. Por sua vez, este último calcula o valor de actuação dos propulsores horizontais.

**Figura 5.10** – Arquitectura do controlador de seguimento de circunferência

À semelhança da estratégia de controlo para o seguimento de uma recta, de forma a permitir o uso deste controlador numa vasta gama de distâncias ao círculo, é necessário subdividi-lo em

dois controladores: um controlador de aproximação e um controlador de proximidade. O controlador de aproximação deverá ser responsável por aproximar o veículo da circunferência. Neste caso, dois cenários se aplicam: o veículo está no interior ou no exterior da circunferência. O controlador de proximidade será responsável pelo seguimento do círculo com um erro de distância nulo, em regime permanente.

A comutação entre estes dois controladores deve ser realizada recorrendo à histerese. Assim, fixa-se um valor de histerese mínimo $h_{min} = 5m$ para a comutação para o controlador de proximidade e um valor de histerese máximo $h_{max} = 10m$ para a comutação para o controlador de aproximação.

5.6.1 Determinação do controlador

Controlador de aproximação

Na aproximação ao círculo, o veículo possui uma velocidade longitudinal de referência u_{ref} definida externamente. A distância à circunferência é dada pela diferença entre a distância ao centro e o raio:

$$e_d = \sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} - r_c \quad (5.98)$$

A aproximação é realizada variando o ângulo do veículo segundo *yaw* de forma a orientá-lo para o centro da circunferência, quando se encontra no exterior. Quando se encontra no interior, deve deslocar-se em direcção ao exterior, em direcção contrária ao centro. Assim, define-se ψ_{ref} como o ângulo de referência a seguir pelo veículo, dado por

$$\psi_{ref} = \begin{cases} \text{atan2}(x_c - x, y_c - y) & , \quad e_d > 0 \\ \text{atan2}(x_c - x, y_c - y) + \pi & , \quad e_d < 0. \end{cases} \quad (5.99)$$

A figura a seguir ilustra a aproximação ao círculo.

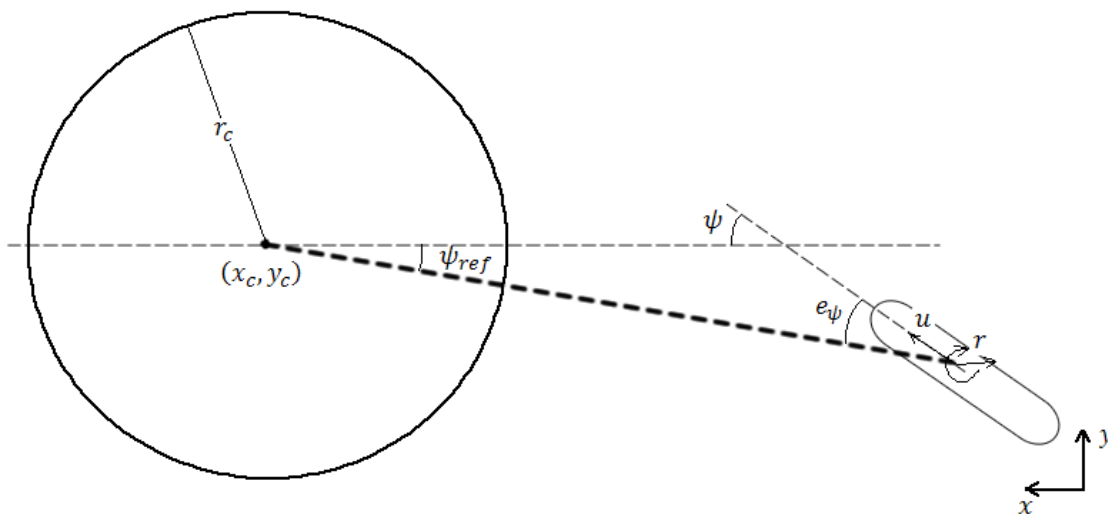


Figura 5.11 – Aproximação à circunferência

Define-se o erro de ângulo na aproximação à circunferência como se segue

$$e_\psi = \psi - \psi_{ref}. \quad (5.100)$$

A expressão de controlo resulta:

$$r_{ref} = -K_{p\psi} e_\psi. \quad (5.101)$$

em que $K_{p\psi} \in \mathbb{R}$ é o coeficiente do ganho proporcional do erro. Note-se que esta expressão não possui nenhum ganho integral, pois não se necessita de erro nulo em regime permanente. Uma componente proporcional do erro na expressão de controlo é suficiente para que o veículo atinja a distância necessária (h_{min}) para comutar para o controlador de proximidade.

Controlador de proximidade

A figura a seguir ilustra a manobra de seguimento de uma circunferência.

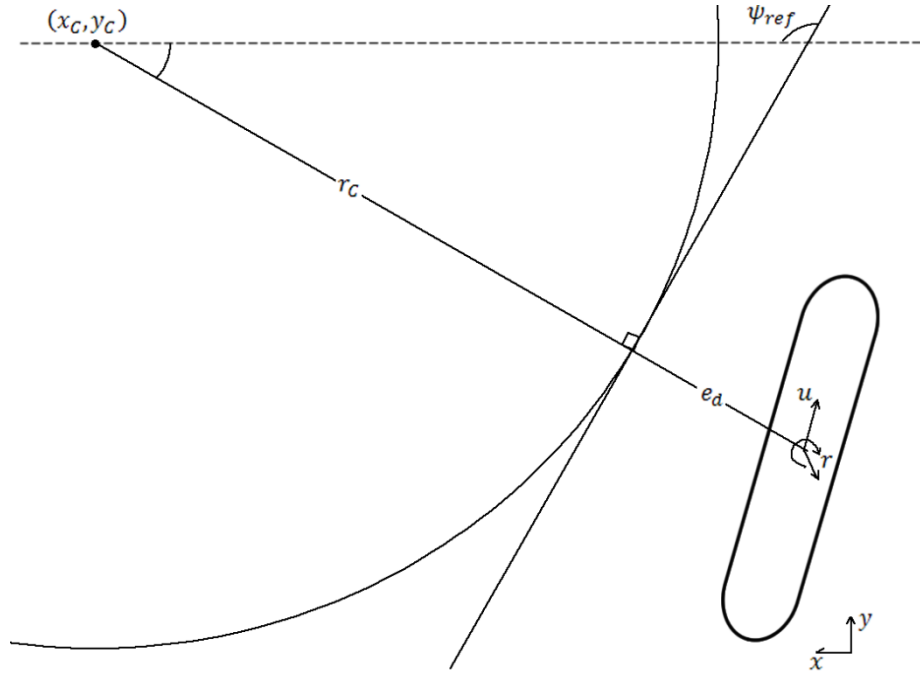


Figura 5.12 – Controlo de proximidade da circunferência

Define-se o sentido de rotação da manobra recorrendo a um ganho proporcional do ângulo de referência (ver figura acima), tangente à circunferência no ponto de intersecção com a recta que une a origem do referencial fixo ao veículo e o centro da circunferência. Este ganho permitirá que o veículo possua um ângulo próximo do da tangente referida ψ_{ref} , ao longo da sua trajectória. Assim,

$$\psi_{ref} = \begin{cases} \text{atan2}(x_c - x, y_c - y) + \pi/2 & , \text{ no sentido negativo de } r \\ \text{atan2}(x_c - x, y_c - y) - \pi/2 & , \text{ no sentido positivo de } r, \end{cases} \quad (5.102)$$

e o erro correspondente à diferença de ângulos

$$e_\psi = \psi - \psi_{ref}. \quad (5.103)$$

Com o objectivo de obter um erro de distância à recta nulo em regime permanente, é necessário introduzir componentes proporcional e integral do erro de distância à circunferência, e_d . Este último é dado por

$$e_d = \begin{cases} \sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} - r_c & , \text{ no sentido negativo de } r \\ -(\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} - r_c) & , \text{ no sentido positivo de } r. \end{cases} \quad (5.104)$$

A expressão de controlo resulta

$$r_{ref} = -K_{p\psi} e_\psi - K_{pd} e_d - K_{id} \int e_d dt, \quad (5.105)$$

em que $K_{p\psi} \in \mathbb{R}$ possui o mesmo valor que para o controlador de aproximação e $K_{pd}, K_{id} \in \mathbb{R}$ são os ganhos proporcional e integral do erro de distância à circunferência, respectivamente.

Com estas expressões de controlo, prevê-se que o erro de seguimento do círculo poderá não atingir a convergência para zero, em regime permanente, devido ao efeito de um possível corrente. Este comportamento pode ser corrigido com a introdução de um *feed-forward* de modo a prever o efeito da corrente na posição do veículo.

Sempre que existir comutação para o controlador de aproximação, a integração do erro em (5.105) deve ser suspensa e reiniciada ($\int e_d dt = 0$).

5.6.2 Determinação dos ganhos

Controlador de aproximação

Sabendo que $|e_\psi| \leq \pi$, o ganho proporcional do erro de ângulo é calculado de forma a evitar a saturação prolongada dos propulsores:

$$K_{p\psi} = \frac{r_{max}}{e_{\psi max}} \quad (5.106)$$

em que $r_{max} = 7.20 \cdot 10^{-1} rad/s$ é a velocidade de rotação máxima segundo *yaw*. Resulta $K_{p\psi} = 2.30 \cdot 10^{-1}$.

Controlador de proximidade

Para impor o sentido de rotação do veículo, a componente proporcional de erro de distância deve ser inferior à componente do erro de ângulo, nos casos em que ambos os erros são máximos, em módulo. Tal limitação permite que o veículo não entre num estado em que realiza várias rotações completas sobre o seu centro de massa antes de ter atingido a circunferência, caso em que a componente $K_{p\psi} e_{\psi_{max}}$ é menor que $K_{pd} e_d$ (ver expressão (5.105)). Assim, arbitra-se:

$$K_{pd} e_{dmax} \leq \frac{1}{5} K_{p\psi} e_{\psi_{max}}, \quad (5.107)$$

em que $e_{dmax} = h_{min}$ é o valor da distância à circunferência aquando da entrada em funcionamento do controlador de proximidade. A resposta do sistema é tanto mais rápida quanto mais rápida for o ganho proporcional de erro de distância, pelo que resulta:

$$K_{pd} = \frac{1}{5} \frac{K_{p\psi} e_{\psi_{max}}}{e_{dmax}} = 2.89 \cdot 10^{-2} \quad (5.108)$$

Para efeito de cálculo de K_{id} , considera-se que a evolução decrescente do erro (em módulo) é linear. A componente integral do erro de distância deve ser menor que a componente proporcional na expressão de controlo (5.105), de forma a atingir a estabilidade em regime permanente. Para obedecer a este critério, arbitra-se

$$\left| K_{id} \int e_d dt \right| = \frac{1}{5} |K_{pd} e_{dmax}|, \quad (5.109)$$

que, dada a evolução linear do erro até zero, resulta

$$K_{id} \int_0^{\frac{e_{dmax}}{u \cos(e_\psi)}} (e_{dmax} - u \cos(e_\psi) t) dt = \frac{1}{5} K_{pd} e_{dmax}. \quad (5.110)$$

Assumindo que a aproximação da recta é realizada com um ângulo constante tal que $|e_\psi| = \pi/4$ entre o ângulo do veículo e o ângulo da tangente à circunferência (ver figura 5.12), vem

$$K_{id} = \frac{1}{5} K_{pd} \frac{u\sqrt{2}}{e_{dmax}}. \quad (5.111)$$

Trajectórias iguais para velocidades longitudinais diferentes

Tal como para o caso de seguimento de uma recta, é interessante obter trajectórias iguais independentemente da velocidade longitudinal. Isto é conseguido através do ajuste dos ganhos para as diferentes velocidades. Assuma-se que os ganhos do controlador de proximidade foram determinados para uma velocidade $u = u_1$. Por analogia com o caso de seguimento de uma

recta, na subsecção 5.5.2, obtêm-se os novos valores dos ganhos $K'_{p\psi}$, K'_{pd} , K'_{id} para uma velocidade $u = u_2$ através das expressões que se mostram a seguir

$$K'_{p\psi} = \frac{u_2}{u_1} K_{p\psi} ; \quad K'_{pd} = \frac{u_2}{u_1} K_{pd} ; \quad K'_{id} = \frac{u_2^2 \sqrt{2}}{5 u_1 e_{dmax}} K_{pd} . \quad (5.112)$$

5.7 Controlador de imobilização num ponto

Na robótica submarina, existem vários cenários em que é necessária a imobilização do veículo num ponto. Este comportamento pode ser difícil de obter devido às correntes, sendo necessária uma actuação constante capaz de contrariar o arrastamento induzido pelo movimento do fluido. Considera-se, neste caso, que o fluido apenas se move no plano horizontal (formado pelos eixos x e y) e é irrotacional.

De forma semelhante aos dois controladores desenvolvidos anteriormente, é necessário recorrer à subdivisão em dois controladores: um de aproximação e outro de proximidade. O primeiro terá como função levar o veículo para uma área circular de raio constante à volta do ponto de referência (x_{ref}, y_{ref}) no plano horizontal. O segundo será responsável por manter o veículo imóvel no ponto de referência independentemente da corrente. Seguindo a estratégia dos controladores de seguimento de recta e de circunferência, gerar-se-ão as referências de velocidade a aplicar no controlador de velocidade horizontal como se mostra na figura 5.13. Note-se que a velocidade de referência u_{ref} não está associada directamente ao controlador de velocidade, isto porque apenas é considerada na aproximação ao ponto de referência. Na proximidade do ponto, esta referência é gerada internamente pelo controlador em função da distância e da corrente.

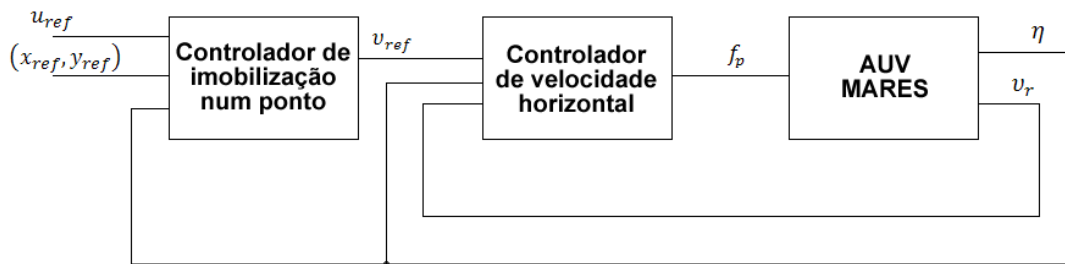


Figura 5.13 – Arquitectura do controlador de imobilização num ponto.

A comutação entre os controladores de aproximação e de proximidade é realizada através de histerese. Arbitra-se $h_{min} = 5m$ como valor para o qual o controlador de proximidade entra em funcionamento e $h_{max} = 10m$ para a entrada em funcionamento do controlador de aproximação.

5.7.1 Determinação do controlador

Controlador de aproximação

A aproximação ao ponto de referência é realizada com uma velocidade $u = u_{ref}$, definida externamente, corrigindo o ângulo do veículo ao longo da trajectória. O ângulo formado entre a posição do veículo e a posição de referência ψ_{ref} , no referencial fixo à Terra, é dado por

$$\psi_{ref} = \text{atan}(y_{ref} - y, x_{ref} - x). \quad (5.113)$$

Deduz-se facilmente o erro entre o ângulo do veículo ψ e o ângulo de referência

$$e_\psi = \psi - \psi_{ref}. \quad (5.114)$$

A equação de controlo resulta

$$r_{ref} = -K_{p\psi} e_\psi. \quad (5.115)$$

em que $K_{p\psi} \in \mathbb{R}$ é o ganho proporcional do erro. Para este controlador, apenas se requer uma componente proporcional dado que não se pretende um erro nulo em regime permanente. É importante referir que a velocidade de aproximação deve ser escolhida de forma que, caso o veículo se desloque contra a corrente, a sua velocidade relativa ao fluido seja maior do que a da própria corrente, compensando o efeito de arrastamento.

Controlador de proximidade

No desenvolvimento deste controlador, é necessário ter em conta o efeito da corrente sobre a posição do veículo. A velocidade do fluido reflectir-se-á na posição absoluta do veículo em relação ao referencial fixo à Terra. Considere-se a figura 5.14, que ilustra o movimento do veículo próximo do ponto de referência com uma velocidade de fluido v_f não nula.

Dado que, no plano horizontal do veículo formado pelos eixos x_B e y_B , apenas se possui actuação segundo x_B e yaw , é necessário que o veículo esteja disposto longitudinalmente à corrente (ver figura 5.14). Por outras palavras, adoptando uma definição matemática, é necessário que a componente da velocidade do fluido segundo o eixo y_B se anule, em regime permanente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot J^T \cdot v_f = 0, \quad (5.116)$$

em que se recorda que J é matriz de transformação dos vectores lineares e angulares do referencial do veículo para o referencial fixo à Terra e $v_f = [u_f, v_f, 0, 0, 0, 0]^T$ o vector de velocidades lineares e angulares do fluido no referencial fixo à Terra. Considera-se que não existe deslocação do fluido na vertical.

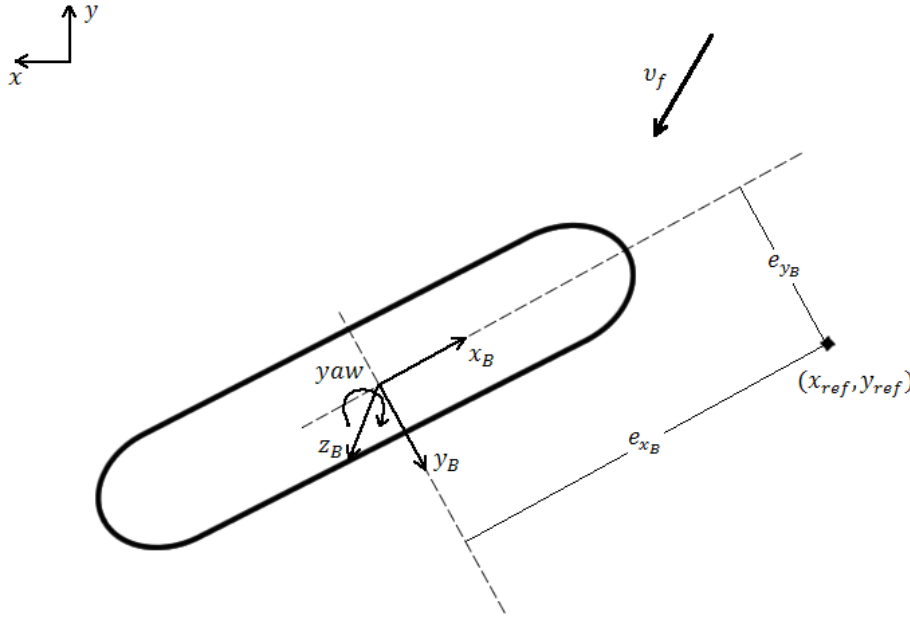


Figura 5.14 – Conceitos para o controlo de imobilização

Define-se, assim, o erro devido ao posicionamento relativo do veículo:

$$e_{v_f} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot J^T \cdot v_f, \quad (5.117)$$

cuja expressão, quando $r \approx 0$ e $p \approx 0$, resulta

$$e_{v_f} \approx [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot J^T \cdot \dot{\eta}. \quad (5.118)$$

Recorda-se que $\dot{\eta}$ é a derivada em ordem ao tempo da posição do veículo no referencial da Terra. Esta última expressão tem grande utilidade dado que não é necessário estimar a velocidade do fluido nem a sua direcção.

Definem-se ainda os erros de distância ao ponto de referência no referencial do veículo, e_{x_B} e e_{y_B} (ver figura 5.14). Estes são dados pela transformação do vector de distância no referencial absoluto para o referencial do veículo, como se mostra na expressão a seguir

$$\begin{bmatrix} e_{x_B} \\ e_{y_B} \\ 0 \end{bmatrix} = J_1^T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{ref} \\ y_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (5.119)$$

em que J_1 é a matriz de transformação dos vectores lineares do referencial do veículo para o referencial fixo à Terra.

O efeito do erro e_{x_B} deve reflectir-se directamente na velocidade longitudinal, através da actuação em u_{ref} . O efeito do erro devido à velocidade não nula do fluido envolvente, e_{v_f} , deve reflectir-se na velocidade de rotação segundo *yaw*, através da actuação em r_{ref} . Dado que não

se possui o grau de liberdade do movimento segundo y_B , o erro e_{y_B} deve ser anulado recorrendo à actuação em r_{ref} . As expressões de controlo resultam

$$u_{ref} = -K_{px} e_{x_B} - K_{ix} \int e_{x_B} dt, \quad (5.120)$$

$$r_{ref} = -K_{pv} e_{v_f} - K_{py} e_{y_B} - K_{iy} \int e_{y_B} dt. \quad (5.121)$$

Note-se que, para a expressão (5.121), o efeito de compensação da corrente $K_{pv} e_{v_f}$ deve ser dominante relativamente aos restantes, de forma a garantir que a velocidade do fluido não induza uma força lateral (segundo y_B) demasiado elevada. Por outras palavras, o ângulo ψ do veículo deve opor-se à orientação da corrente ($\psi \approx \text{atan } 2(v_f, u_f) + \pi$), com desvios relativamente baixos.

Sempre que existir comutação para o controlador de aproximação, a integração dos erros em (5.120) e (5.121) deve ser suspensa e reiniciada ($\int e_{x_B} dt = \int e_{y_B} dt = 0$).

5.7.2 Determinação dos ganhos

Controlador de aproximação

Usando o mesmo método que para o controlador de seguimento de uma circunferência, sabe-se que a velocidade máxima de rotação segundo *yaw*, é dada por $|r_{max}| = 7.20 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$ e $|e_{\psi_{max}}| = \pi$ o valor máximo do erro de ângulo. Recorrendo à expressão (5.115), determina-se facilmente

$$\begin{aligned} K_{p\psi} &= \frac{r_{max}}{e_{\psi_{max}}} \\ &= 2.30 \cdot 10^{-1}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Controlador de proximidade

Tal como em secções anteriores, deseja-se evitar a saturação prolongada dos propulsores, dado que a capacidade de resposta nesta situação é baixa. Desta forma, os ganhos devem ser determinados de modo a obedecer a este critério. Recorrendo à expressão (5.120), despreza-se a componente integral, para efeito de cálculo de K_{px} , e assume-se que a velocidade longitudinal máxima a que o veículo se pode mover é $u_{max} = 3.85 \text{ m/s}$, tal como determinado no Capítulo 4, na expressão (4.6). Considera-se ainda que $|e_{x_B \text{ max}}| = h_{min}$ é o valor máximo do erro aquando da entrada em funcionamento do controlador de proximidade. Com o objectivo de obter uma resposta rápida do sistema, resulta

$$\begin{aligned} K_{px} &= \frac{u_{max}}{e_{x_B \text{ max}}} \\ &= 7.7 \cdot 10^{-1}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

A componente integral do erro em (5.120) deve possuir um ganho tal que $K_{ix} \int e_{x_B} dt \leq \frac{1}{3} K_{px} e_{x_B \max}$ de forma a garantir uma convergência assintótica do erro para zero. Esta condição é arbitrada. Considerando uma convergência linear do erro para zero, obtém-se, maximizando K_{ix} ,

$$\begin{aligned} K_{ix} \int_0^{e_{x_B \max}/u_{\max}} e_{x_B} dt &= \frac{1}{3} K_{px} e_{x_B \max} \\ \Downarrow \\ K_{ix} \int_0^{e_{x_B \max}/u_{\max}} (e_{x_B \max} - u_{\max} t) dt &= \frac{1}{3} K_{px} e_{x_B \max}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Após resolução desta equação, obtém-se $K_{ix} = 3.95 \cdot 10^{-1}$.

Para o cálculo do ganho proporcional do erro devido à componente segundo y_B da corrente, considera-se que a velocidade máxima que esta pode atingir é $|v_{f \max}| = 0.5 \text{ m/s}$. Assim, desprezando os restantes termos da expressão (5.121), obtém-se, de forma a evitar a saturação prolongada dos propulsores:

$$\begin{aligned} K_{pv} &= \frac{r_{\max}}{v_{f \max}} \\ &= 1.44. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Pelas razões apresentadas na subsecção anterior, na expressão (5.121), o efeito de compensação da corrente $K_{pv} e_{v_f}$ deve ser dominante relativamente aos restantes. Desta forma, arbitra-se

$$K_{py} e_{y_B \max} \leq \frac{1}{5} K_{pv} e_{v_f \max}. \quad (5.126)$$

Porém, existe um compromisso com a rapidez de resposta do sistema, que será tanto mais rápida quanto mais elevado for o ganho K_{py} , pelo que resulta

$$K_{py} e_{y_B \max} = \frac{1}{5} K_{pv} e_{v_f \max}. \quad (5.127)$$

Considerando $e_{y_B \max} = h_{\min}$, o valor máximo possível aquando da entrada em funcionamento do controlador de proximidade, da última expressão resulta $K_{py} = 2.88 \cdot 10^{-2}$.

De forma a calcular o ganho integral do erro segundo y_B , assume-se que o veículo está posicionado numa recta tal que $e_{x_B} = 0$, como mostra a figura 5.15. Considera-se que o veículo se desloca com velocidade transversal, em relação ao referencial fixo à Terra, e_{v_f} constante. Isto

implica que $r_{ref} = 0$. Na entrada em funcionamento do controlador, usando (5.121), ter-se-á, sabendo que a componente integral é reiniciada,

$$\begin{aligned} e_{v_f} &= -K_{py} \frac{e_{y_B}}{K_{pv}} \\ &= 1 \cdot 10^{-1} \end{aligned} \quad (5.128)$$

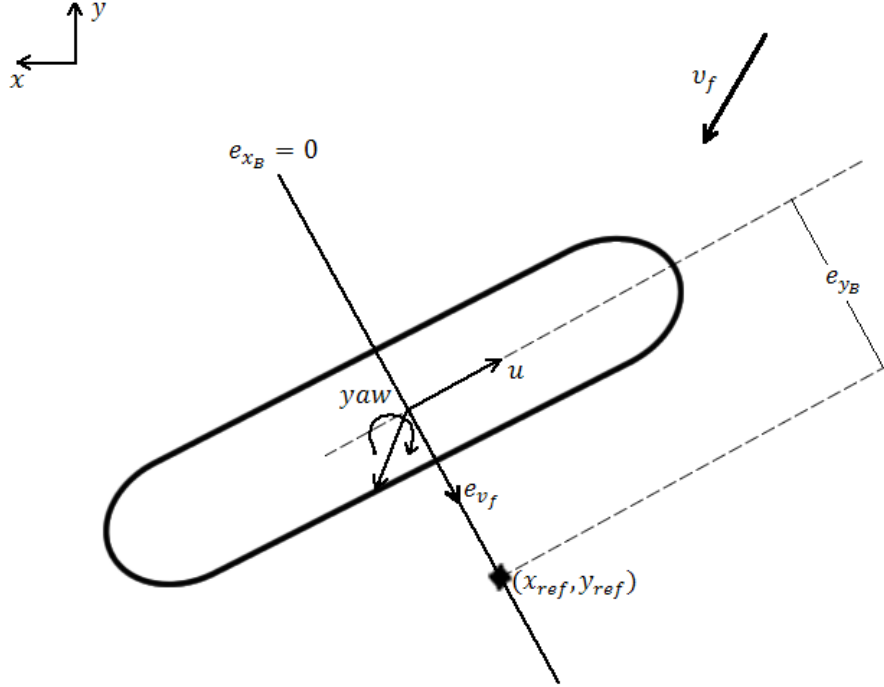


Figura 5.15 – Proximidade do ponto de referência.

Para efeito de cálculo, considera-se que o erro e_{y_B} varia linearmente à velocidade e_{v_f} , decrescendo, em módulo, até zero. De modo a satisfazer a convergência assintótica do erro para zero, arbitra-se

$$K_{iy} \int e_{y_B} dt = \frac{1}{10} K_{py} e_{y_B \max} . \quad (5.129)$$

O valor do integral depende da velocidade do fluido. Se esta for elevada, o veículo atingirá mais rapidamente y_{ref} , pelo que o valor do integral será menor. Com esta imposição tenta-se garantir que a componente integral do erro não supera a componente proporcional máxima. Considerando a variação linear do erro, vem

$$K_{iy} \int_0^{\frac{e_{y_B \max}}{e_{v_f}}} e_{y_B \max} - e_{v_f} t dt = \frac{1}{10} K_{py} e_{y_B \max} . \quad (5.130)$$

Da resolução desta expressão, obtém-se $K_{iy} = 5.76 \cdot 10^{-5}$.

Nas tabelas a seguir, mostram-se os valores de saturação dos erros e dos ganhos determinados nesta secção.

Tabela 5.5 - Valores de saturação dos erros do controlador de imobilização

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
$e_{\psi max}$	π	rad	Saturação do erro segundo yaw
$e_{x_B max}$	5	m	Saturação do erro de distância segundo x_B
$e_{y_B max}$	5	m	Saturação do erro de distância segundo y_B

Tabela 5.6 - Valores dos ganhos do controlador de imobilização

Parâmetro	Valor	Descrição
$K_{p\psi}$	$2.89 \cdot 10^{-1}$	Ganho proporcional do erro de ângulo segundo yaw
K_{px}	$7.7 \cdot 10^{-1}$	Ganho proporcional da distância segundo x_B
K_{ix}	$3.95 \cdot 10^1$	Ganho integral da distância segundo x_B
K_{pv}	$1.44 \cdot 10^0$	Ganho proporcional do erro de velocidade lateral
K_{py}	$2.88 \cdot 10^{-2}$	Ganho proporcional do erro segundo y_B
K_{iy}	$5.76 \cdot 10^{-5}$	Ganho integral da distância segundo y_B

Capítulo 6

Simulação

Com o objectivo de testar o comportamento dos controladores assim como da dinâmica do veículo, implementou-se uma simulação. Pretende-se analisar os vários sinais e as trajectórias seguidas ao longo do tempo. Este capítulo encontra-se dividido em duas partes: simulação com os controladores implementados na mesma plataforma que o simulador do veículo, e simulação com controlador e simulador desenvolvidos em plataformas diferentes. Com este segundo caso, pretende-se obter um comportamento mais próximo da realidade, considerando os atrasos e os ciclos de controlo que surgem durante a operação do veículo, para além de poder simular os controladores na sua versão de implementação no AUV MARES. Procurar-se-á complementar as análises, simulando o sistema sob diversas condições.

6.1 Simulação de veículo e controladores na mesma plataforma

Para a simulação do veículo e dos controladores, escolheu-se o Simulink do Matlab como ferramenta. Este programa permite a simulação de sistemas não lineares complexos, possuindo uma interface de utilização simples e poderosa. Para além destas vantagens, permite ainda a observação de todos os sinais envolvidos no sistema simulado. Realça-se também a possibilidade de implementar sistemas de ordem elevada, com alguma facilidade. Se tal não fosse possível, o problema de simulação ter-se-ia pouco tratável e muito complexo.

Nesta secção, segue-se a organização do capítulo anterior, analisando o comportamento do sistema para cada controlador desenvolvido. Os resultados obtidos para cada controlador serão apresentados pela mesma ordem que foram determinados no Capítulo 5.

6.1.1 Controlo de velocidade vertical

Nesta subsecção, considera-se o controlo de velocidade vertical do veículo. Despreza-se o efeito da corrente, considerando-a nula. Nesta simulação, aplicam-se referências de velocidade vertical w_{ref} e segundo *pitch* q_{ref} variáveis ao longo do tempo. A primeira tem uma frequência menos elevada que a primeira, de forma a analisar o comportamento desacoplado entre estes dois movimentos elementares. Os propulsores horizontais $P1$ e $P2$ (figura 3.5) não exercem qualquer actuação sobre o veículo.

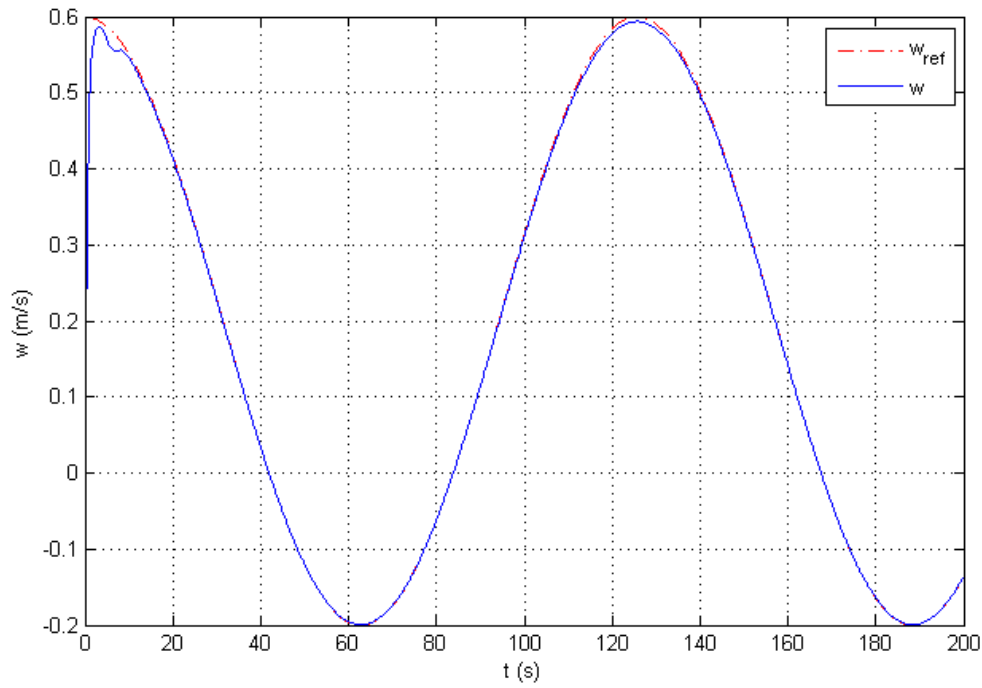


Figura 6.1 – Velocidade linear vertical w em função do tempo.

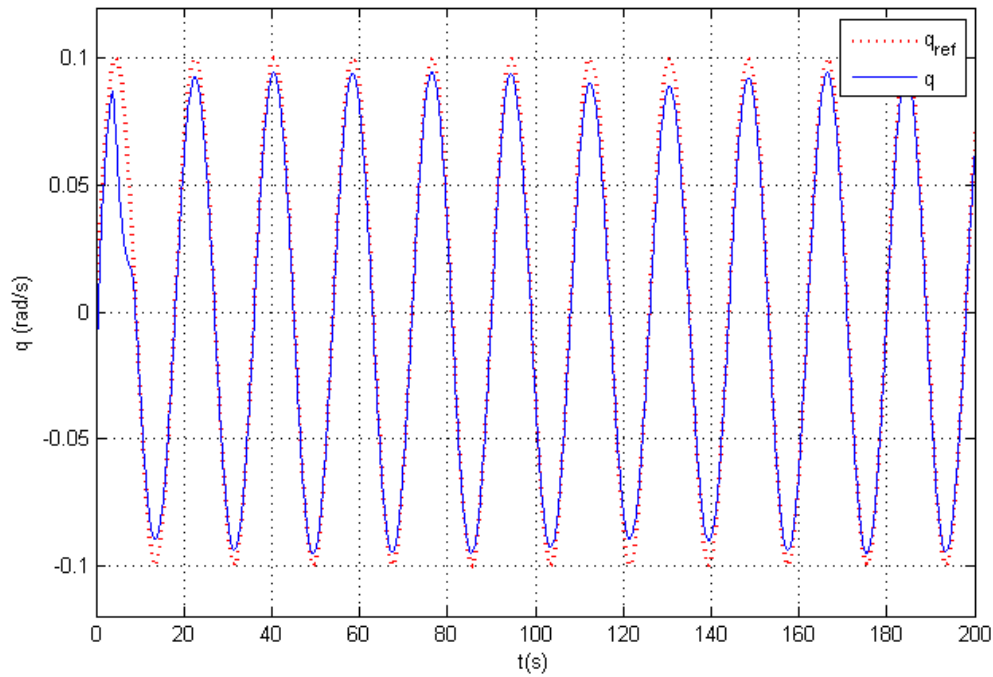


Figura 6.2 – Velocidade angular vertical q em função do tempo.

Nos instantes iniciais, as velocidades linear e angular, w e q , não seguem exactamente as referências. Isto é explicado pela saturação do propulsor F_{P3} , como se mostra na figura a seguir.

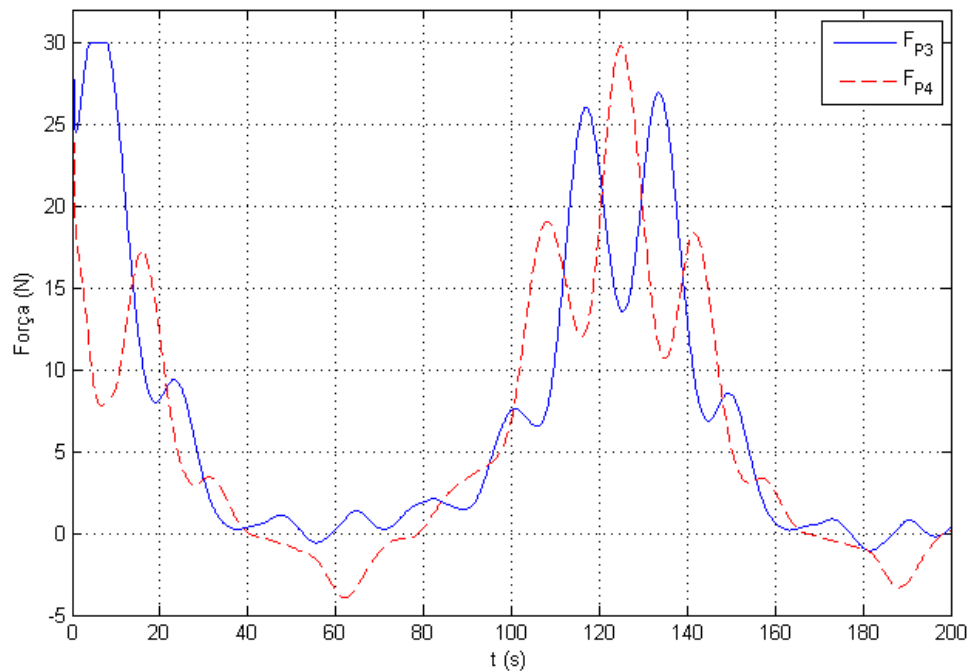


Figura 6.3 – Força exercida pelos propulsores em função do tempo.

6.1.2 Controle de velocidade horizontal

A partir da observação da figura 4.14, conhece-se a velocidade longitudinal u máxima em função da velocidade de rotação r . Na simulação do controlador de velocidade horizontal, aplica-se uma velocidade longitudinal de referência $u_{ref}(t)$ e uma velocidade angular de referência $r_{ref}(t)$ variáveis ao longo do tempo. A primeira possui uma frequência mais reduzida que a segunda de forma a observar o comportamento desacoplado destas velocidades. Procura-se obedecer aos valores máximos apresentados na figura 4.14, de forma a evitar a saturação dos propulsores.

Nas figuras a seguir, mostram-se os resultados da simulação.

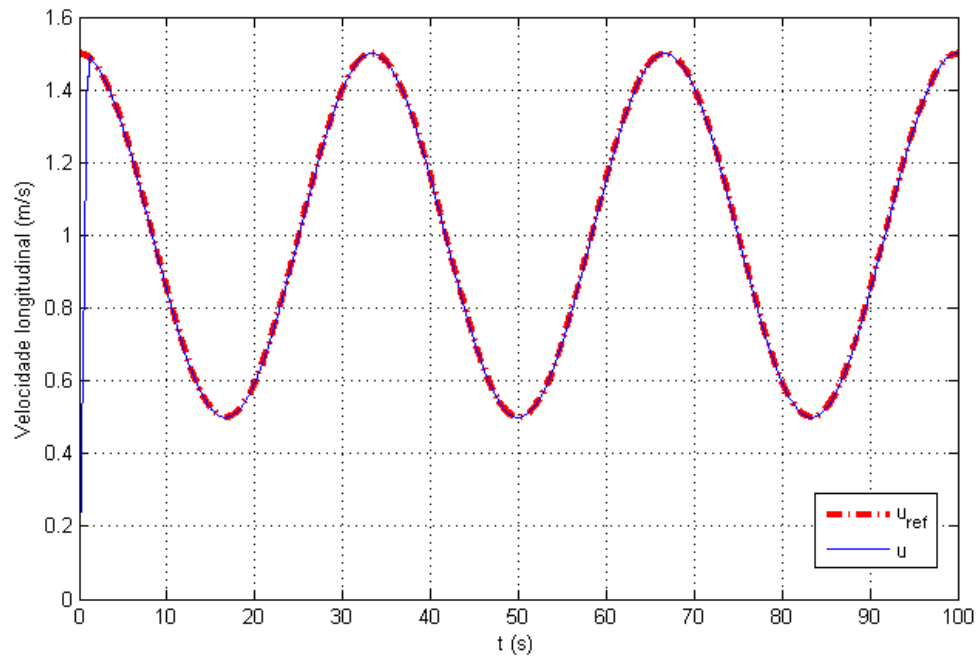


Figura 6.4 – Velocidade longitudinal u em função do tempo.

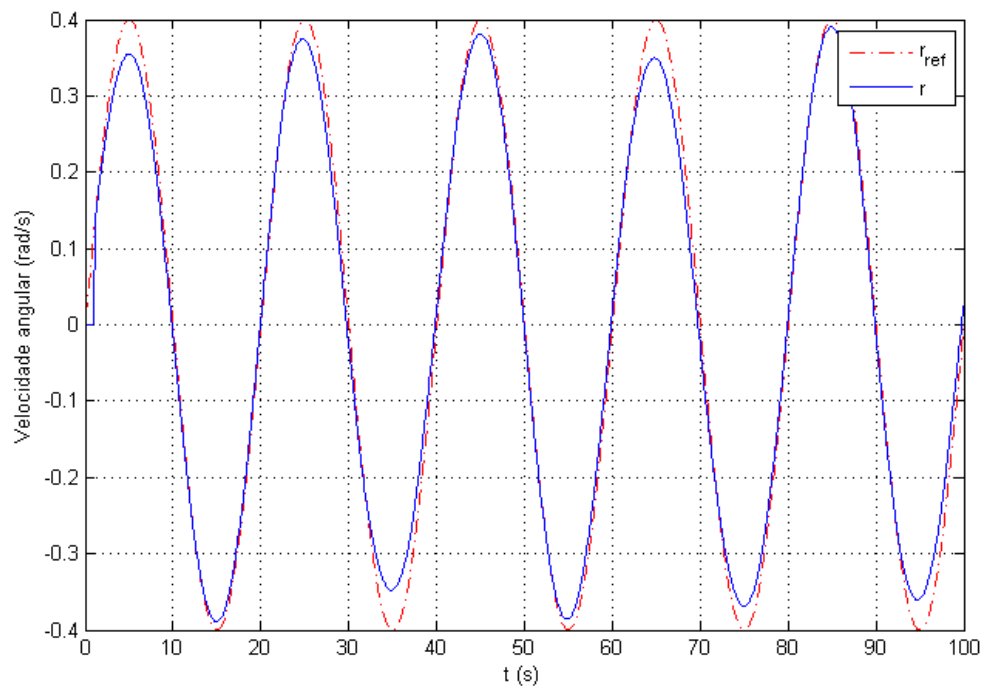


Figura 6.5 – Velocidade angular r em função do tempo.

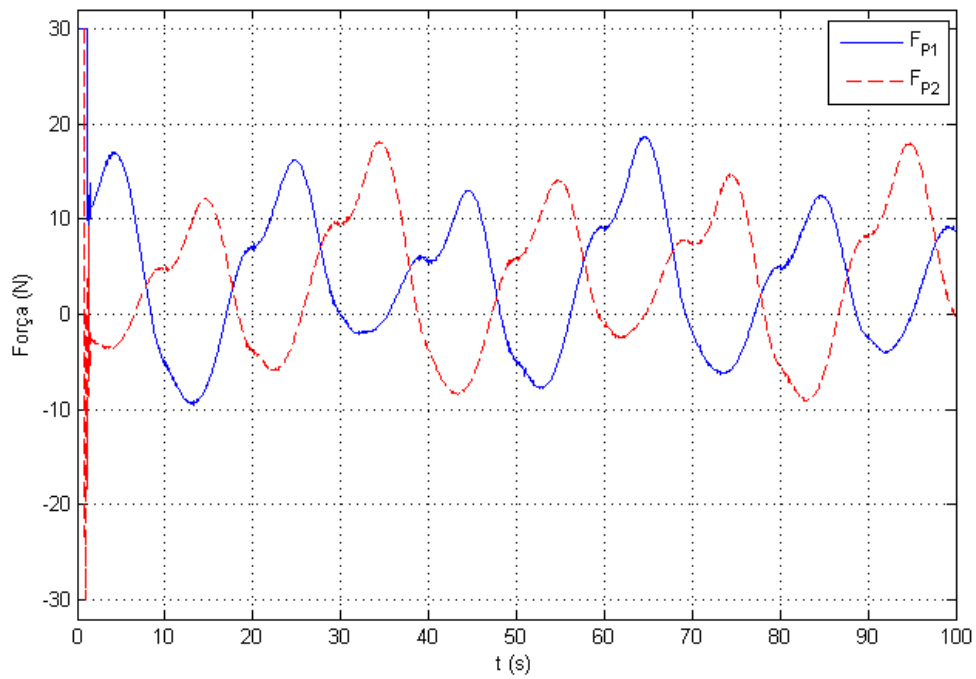


Figura 6.6 – Força exercida pelos propulsores em função do tempo.

Na figura a seguir mostra-se a resposta ao degrau quando o veículo se encontra imóvel, em $t = 0$ s, colocando-lhe uma referência de velocidade $u_{ref} = 1.5m/s$ e $r_{ref} = 0rad/s$.

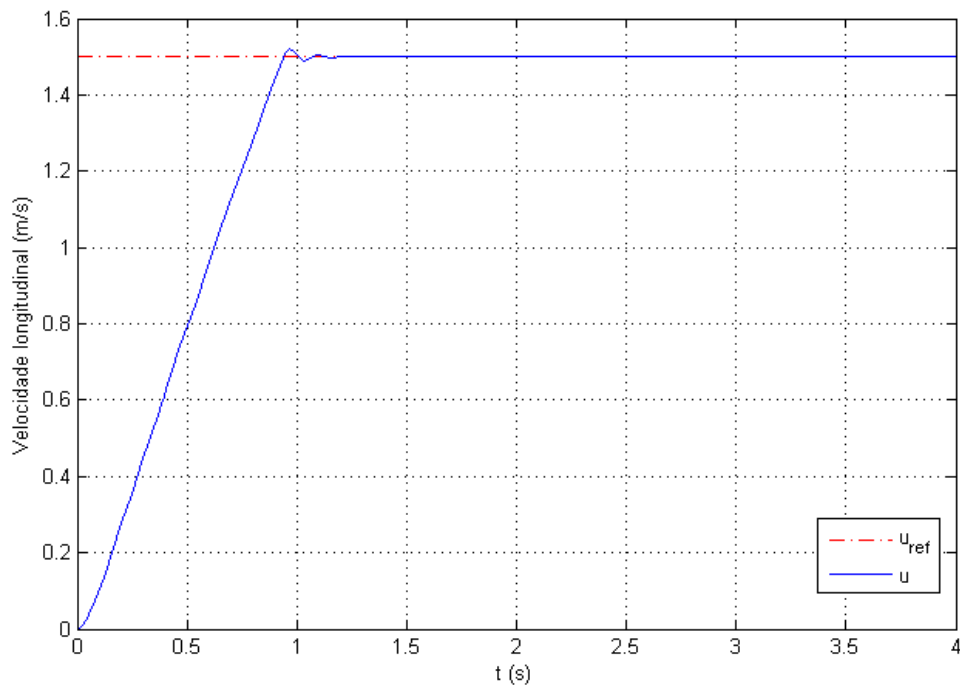


Figura 6.7 – Resposta ao degrau da velocidade longitudinal u em função do tempo.

A actuação dos dois propulsores será igual dado que apenas se requer um modo comum quando a velocidade angular r é nula. Mostra-se a seguir o valor da actuação dos dois propulsores horizontais.

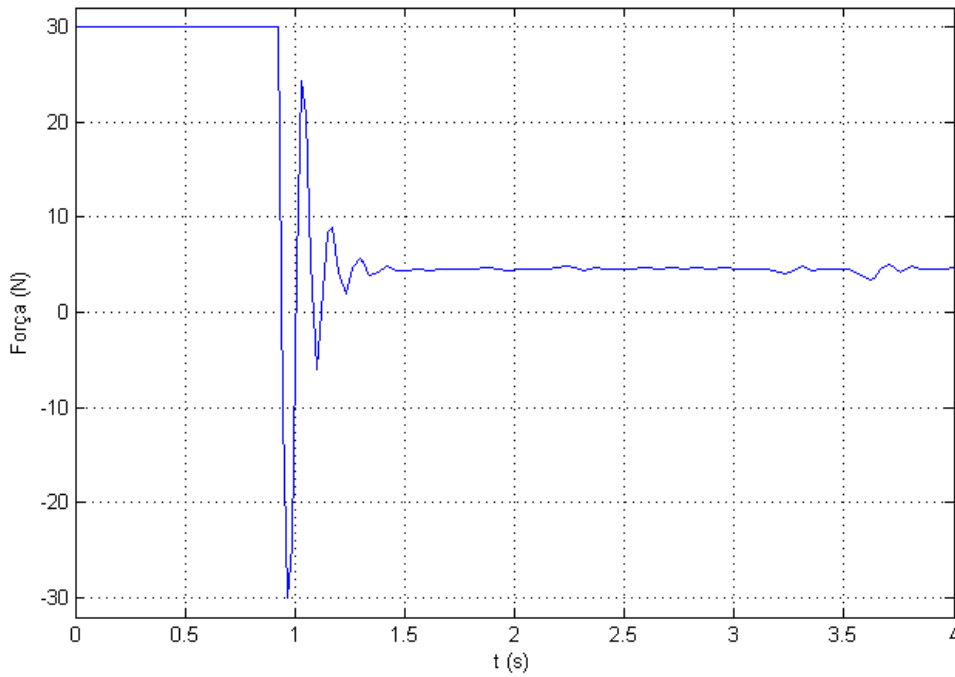


Figura 6.8 – Força exercida pelos propulsores verticais em função do tempo (F_{P3} e F_{P4} coincidentes).

6.1.3 Controlo de posição vertical (1)

Para a demonstração do funcionamento deste controlador, são fornecidas ao controlador as referências constantes de profundidade e de *pitch*, $z_{ref} = 30m$ e $\theta_{ref} = -\pi/6$, respectivamente. Assume-se que não existe movimento linear transversal nem rotativo segundo *yaw* e *roll*. A actuação dos propulsores horizontais é considerada nula.

Obedecendo ao critério estabelecido na expressão (5.64) ($k_e k_{\alpha_2} = 29$) impõe-se, após alguns testes de simulação, $k_e = 0.5$ e $k_{\alpha_2} = 58$. Recorda-se que k_e pode ser considerado como um ganho derivativo do erro enquanto $k_e k_{\alpha_2}$ pode ser considerado como um ganho proporcional. Não se deseja que a componente derivativa do controlador possua grande influência na actuação por ser bastante sensível ao ruído.

Nas figuras a seguir, mostra-se a evolução da profundidade do veículo, z , e do ângulo segundo *pitch*, θ .

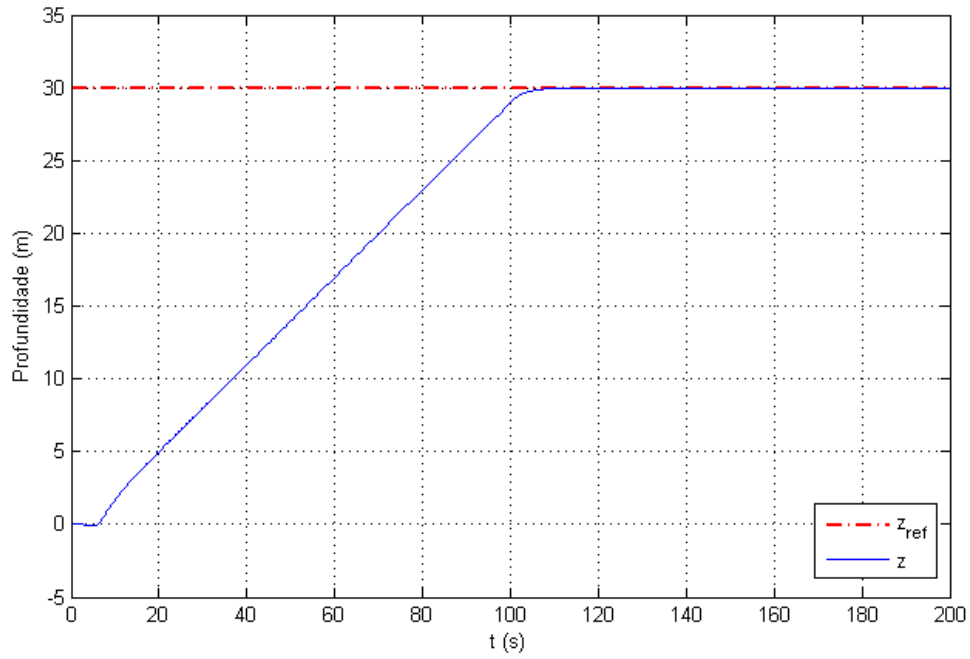


Figura 6.9 – Profundidade z em função do tempo para $z_{ref} = 30m$ (1).

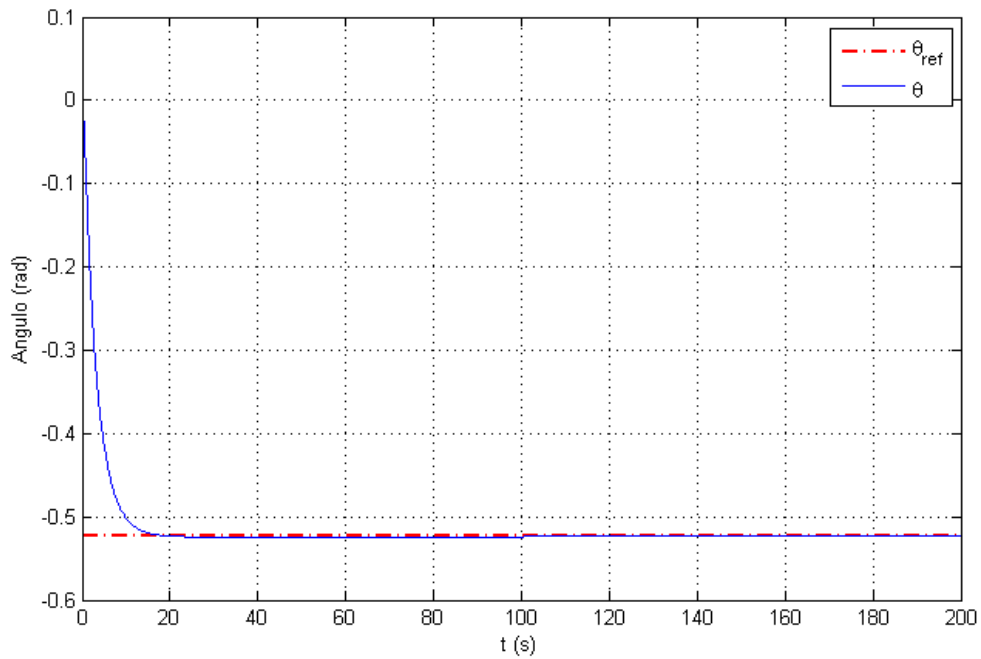


Figura 6.10 – Ângulo θ em função do tempo para $\theta = -\pi/6 \text{ rad}$ (1).

Na figura a seguir, mostram-se as forças de actuação dos propulsores verticais. Note-se que, durante a realização do mergulho, a velocidade $w > 0$ provocará um momento de *drag* negativo segundo *pitch*, devido ao termo $M_{|w|w}$. Este é compensado, para o ângulo de referência considerado, com um momento provocado pela diferença de actuação dos propulsores tal que $F_{P3} > F_{P4}$. Em regime permanente ($t \geq 110s$), a velocidade w é positiva, de modo a manter o

ângulo e a profundidade. Os propulsores verticais têm de compensar o efeito de *drag* referido para o caso do mergulho e o momento de restabelecimento. Para $\theta = -\pi/6$ estes dois últimos momentos estão próximos de se anular, como se pode verificar pelo modo diferencial praticamente nulo dos propulsores verticais, na figura a seguir.

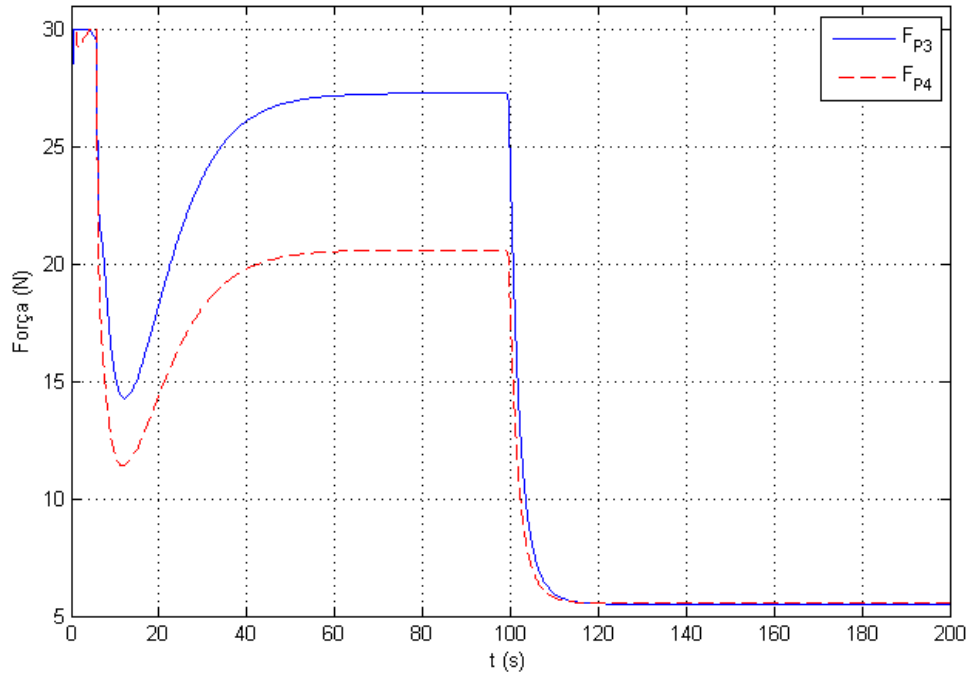


Figura 6.11 – Força exercida pelos propulsores verticais para $z_{ref} = 30\text{ m}$ e $\theta_{ref} = -\pi/6\text{ rad}$ (1).

6.1.4 Controlo de posição vertical (2)

Na simulação deste controlador, aplicam-se as mesmas referências que na subsecção anterior ($z_{ref} = 30\text{ m}$, $\theta_{ref} = -\pi/6$), com o objectivo de comparar o comportamento de algumas variáveis de estado ao longo do tempo. Nas duas figuras a seguir, mostra-se a evolução da profundidade e do ângulo *pitch*.

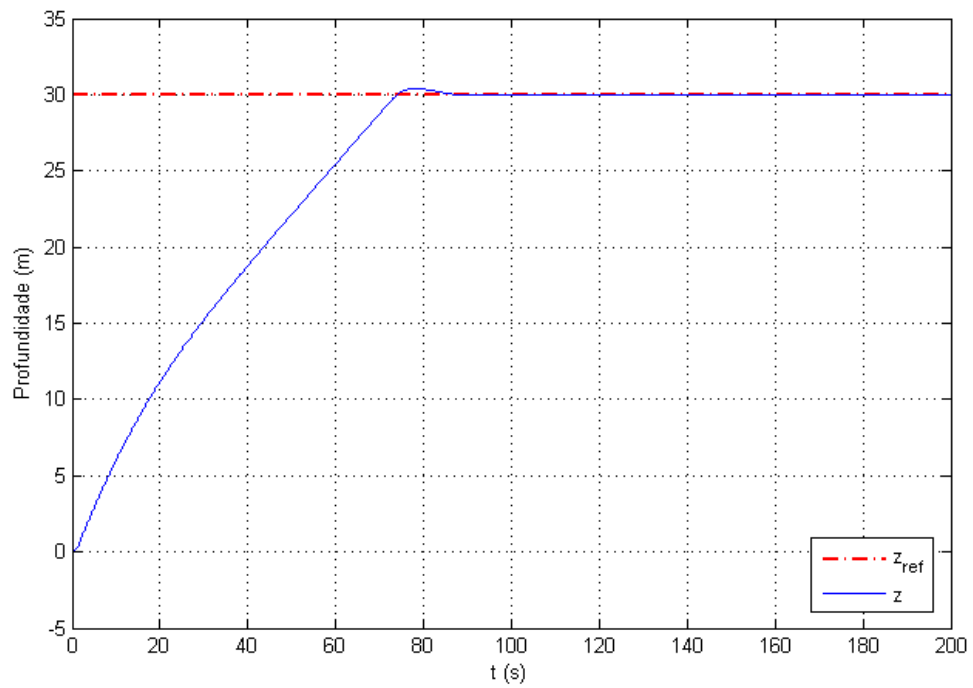


Figura 6.12 – Profundidade z em função do tempo para $z_{ref} = 30$ m (2).

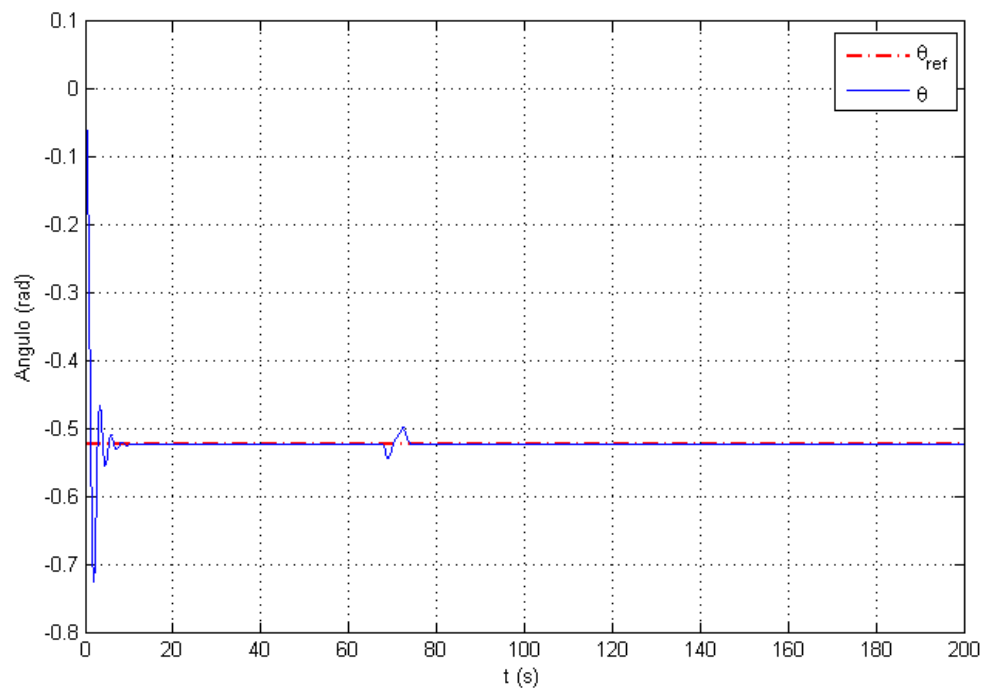


Figura 6.13 - Ângulo θ em função do tempo para $\theta = -\pi/6$ rad (2).

Na figura a seguir, mostra-se a actuação dos propulsores em função do tempo.

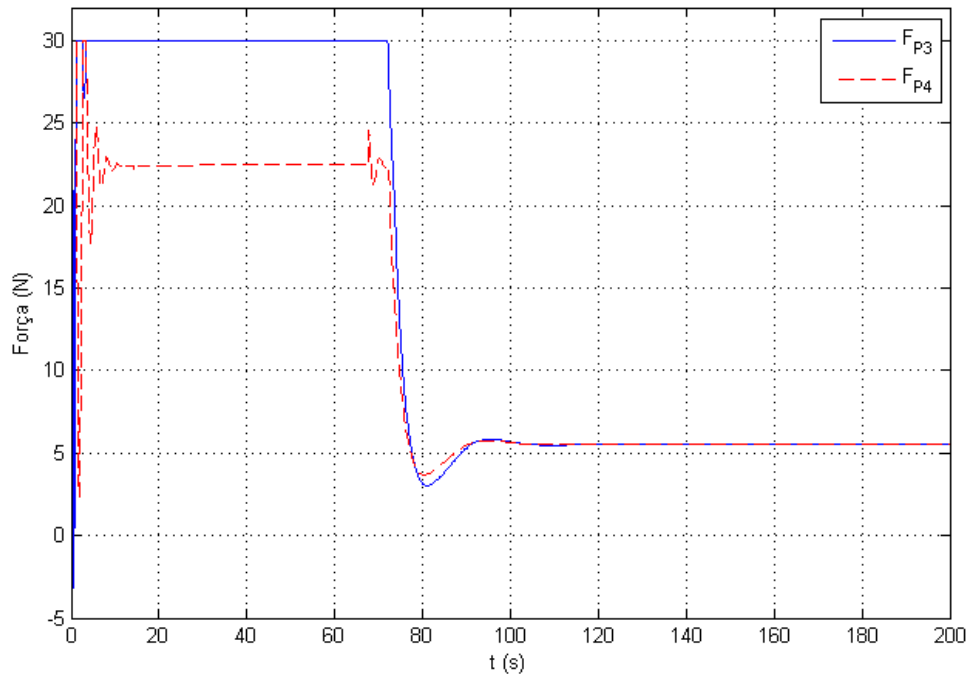


Figura 6.14 – Força exercida pelos propulsores verticais para $z_{ref} = 30 \text{ m}$ e $\theta_{ref} = -\pi/6 \text{ rad}$ (2).

Com este controlador, obtém-se uma resposta mais rápida, tanto para o ângulo como para a profundidade. Considerando a última figura, observa-se que existe saturação do propulsor *P3* nos instantes iniciais, sendo ajustada a força do propulsor *P4* em função do ângulo, mantendo $\theta \approx \theta_{ref}$ durante a descida. Assim, a velocidade w atinge o seu valor máximo, para este ângulo. O comportamento do controlador, neste caso, mostra robustez face ao limite da actuação. O mesmo não acontece para o da subsecção anterior, em que existe elevada sensibilidade quando um dos propulsores atinge o seu valor de saturação.

6.1.5 Controlo de seguimento de recta

Nesta subsecção, arbitram-se dois pontos de uma recta para o seu seguimento: $(x_1, y_1) = (0, 100)$ e $(x_2, y_2) = (300, 0)$. O seguimento é realizado no sentido do primeiro para o segundo ponto. Arbitra-se uma velocidade longitudinal $u = 1 \text{ m/s}$. Despreza-se o efeito da corrente neste caso. Na figura a seguir mostra-se a trajectória realizada pelo veículo. Inicialmente, é realizado um mergulho até $z = 3 \text{ m}$ ao mesmo tempo que o veículo inicia a aproximação à recta.

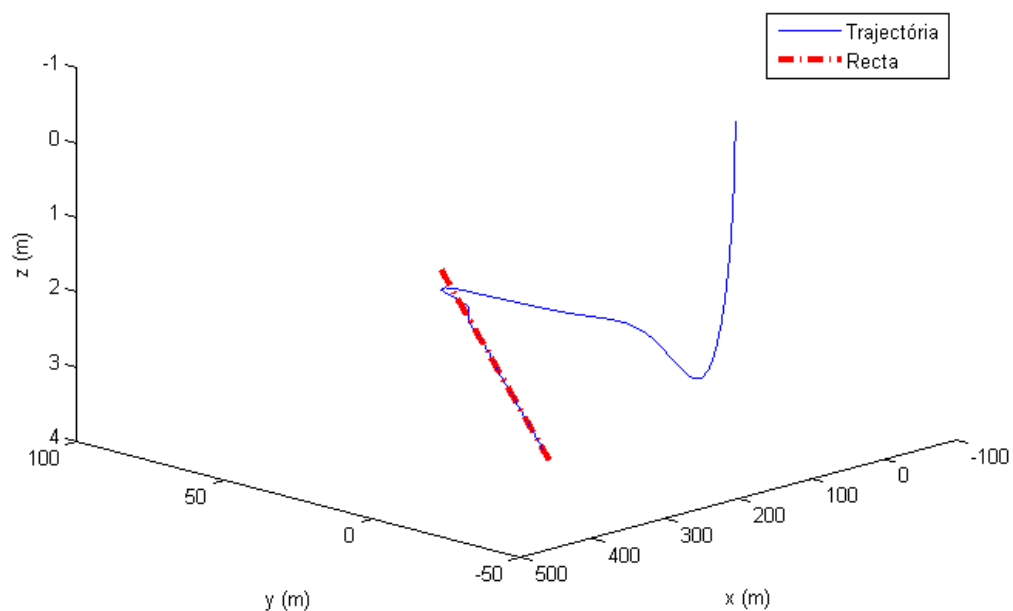


Figura 6.15 – Trajectória descrita pelo veículo durante o seguimento da recta.

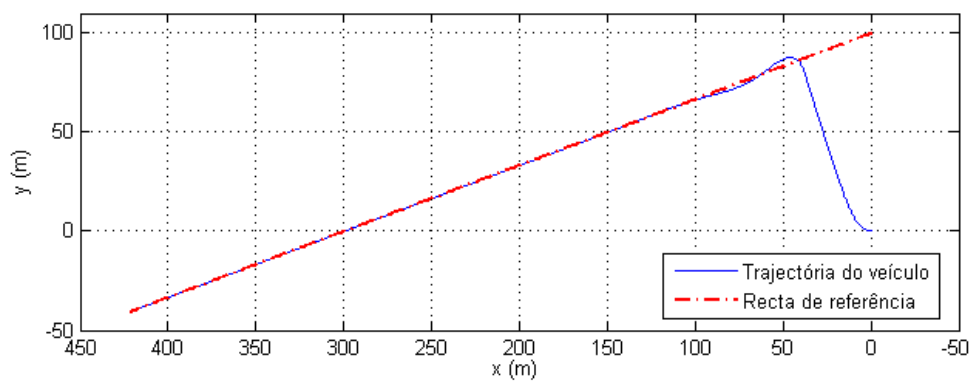


Figura 6.16 – Projecção horizontal da trajectória descrita pelo veículo durante o seguimento da recta.

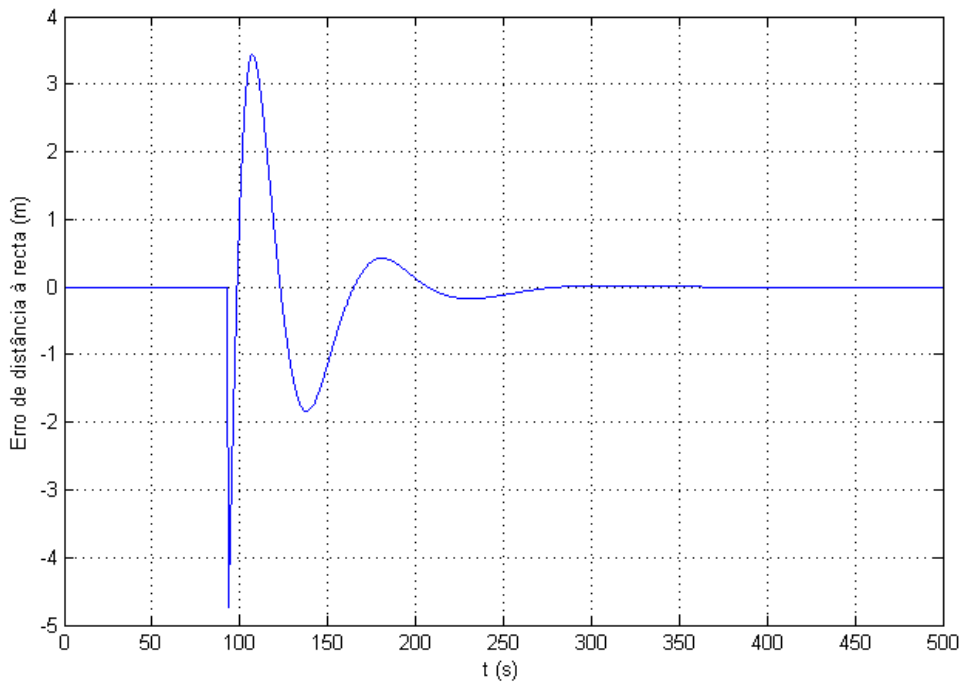


Figura 6.17 – Erro de distância à recta em função do tempo.

Na figura acima, o erro de distância à recta é nulo nos instantes iniciais dado que não se considera no controlador de aproximação (ver subsecção 5.5.1).

Trajectórias iguais para velocidades longitudinais diferentes implicam que os erros de distância à recta sejam iguais em instantes de tempo diferentes. Considere-se o erro de distância $e_{d1}(t)$ para uma velocidade longitudinal u_1 e o erro de distância $e_{d2}(t)$ para uma velocidade u_2 . Ambas as velocidades longitudinais são consideradas constantes. Se as trajectórias são iguais, ter-se-á

$$e_{d1}(t) = e_{d2}\left(\frac{u_2}{u_1}t\right). \quad (6.1)$$

Assim, de forma a comprovar que são realizadas trajectórias iguais, mostram-se os erros de distância à recta, para $u_1 = 1\text{m/s}$ e $u_2 = 2\text{m/s}$, na figura a seguir. Pode-se notar um ligeiro “desfasamento” entre as duas formas de onda. Isto deve à variação não instantânea da velocidade longitudinal nos momentos iniciais.

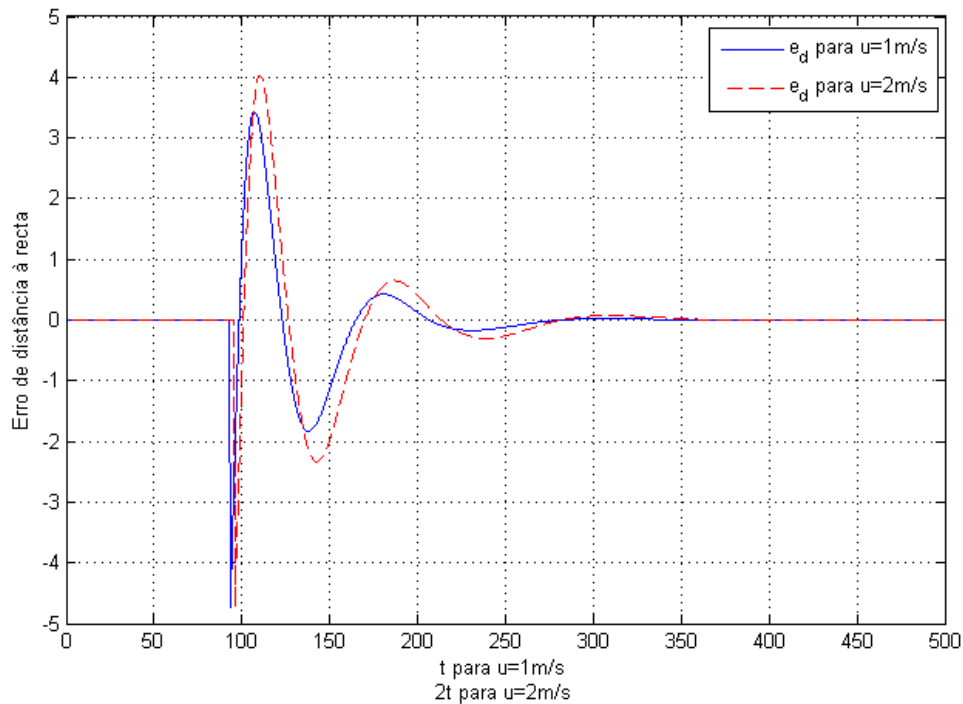


Figura 6.18 – Comparação de trajetória para $u = 1\text{m/s}$ e $u = 2\text{m/s}$.

Este resultado permite concluir que as trajetórias seguidas para velocidades diferentes são aproximadamente iguais.

6.1.6 Controlo de seguimento de circunferência

Para a demonstração do funcionamento deste controlador, atribuem-se os seguintes parâmetros do círculo a seguir: o centro está situado no ponto $(x_c, y_c) = (50, 50)$ e o raio é $R = 10\text{m}$. Relativamente à posição vertical, não se realiza controlo da profundidade, apenas do ângulo *pitch*. Esta é uma variante do controlador de posição vertical em que se considera $e_z(t) = 0 \forall t > 0$. Assim, o veículo irá descrever uma trajetória helicoidal se $\theta \neq 0$. Neste caso, aplica-se $\theta = -\pi/10$, de forma a mergulhar ao longo da trajetória, com o nariz a apontar para o fundo.

Com o objectivo de comprovar a robustez do controlador no meio envolvente, introduz-se uma velocidade de fluido (corrente) $v_f = [-0.3, 0.2, 0, 0, 0]^T$. A velocidade longitudinal de referência imposta é $u_{ref} = 1\text{m/s}$. Na figura a seguir, mostra-se a trajetória seguida pelo veículo nas condições referidas.

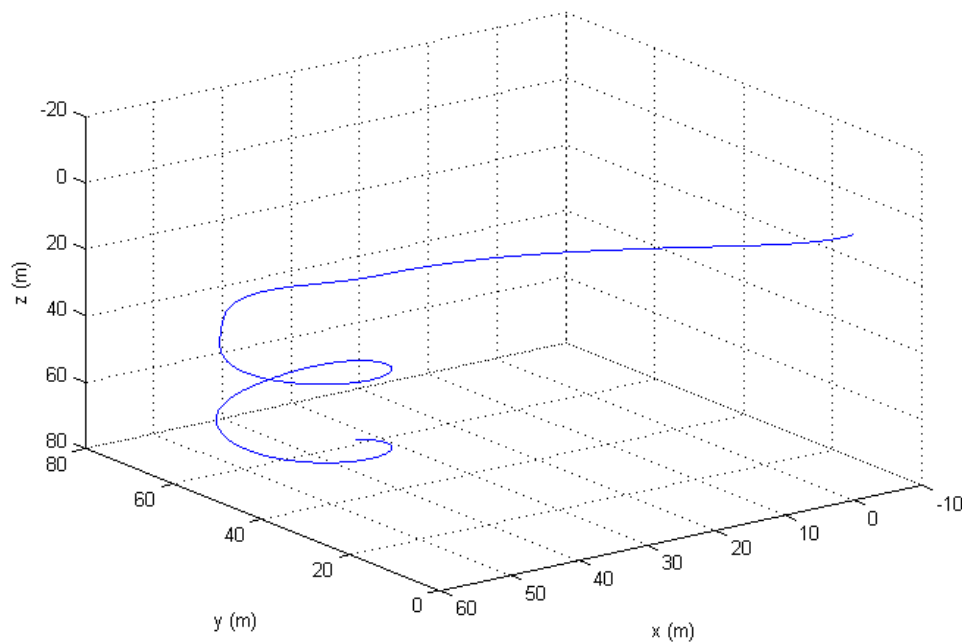


Figura 6.19 – Trajectória seguida pelo veículo durante o seguimento do círculo.

Na figura seguinte, mostra-se a evolução do erro de distância à circunferência em função do tempo. Tal como para o caso de seguimento da recta, nos instantes iniciais, o este erro é nulo por não se considerar durante a aproximação (ver subsecção 5.6.1). Como se pode verificar, este não estabiliza no zero dado que, durante a trajectória circular, a velocidade do fluido arrasta o veículo tanto para o interior como para o exterior da circunferência, em função da sua posição. Tal como foi referido na secção 5.6, este comportamento pode ser compensado pela introdução de um *feed-forward* de modo a prever o efeito da corrente sobre a posição do veículo.

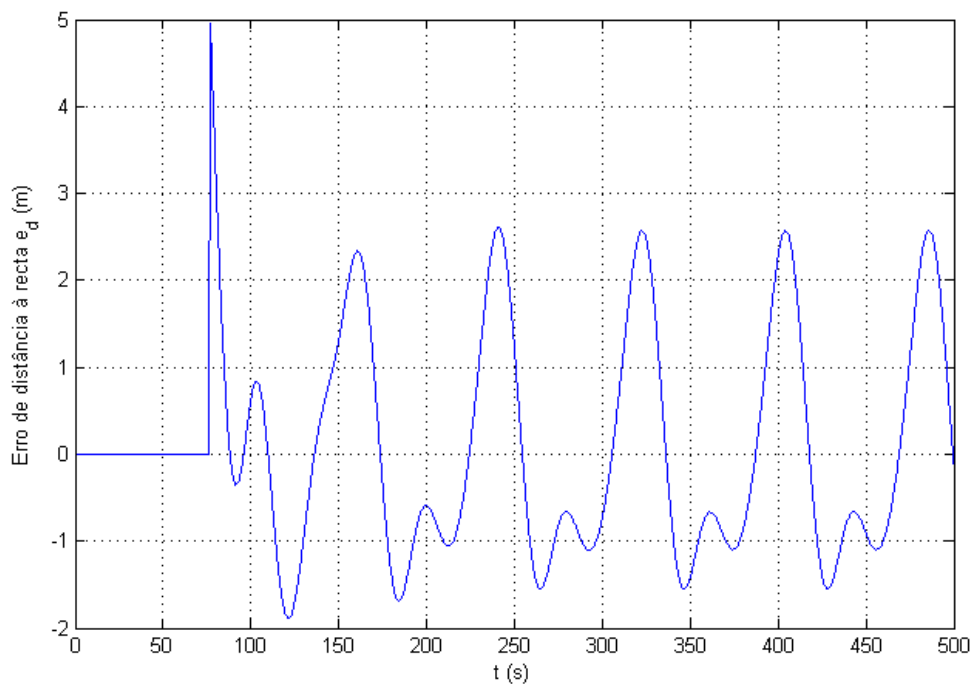


Figura 6.20 – Erro de distância ao círculo.

A amplitude do erro de distância pode ser reduzida através de um ajuste dos ganhos K_{pd} e K_{id} . Estes teriam de ser aumentados adequadamente para um comportamento com erro de distância próximo de zero.

A actuação dos propulsores é apresentada na figura a seguir.

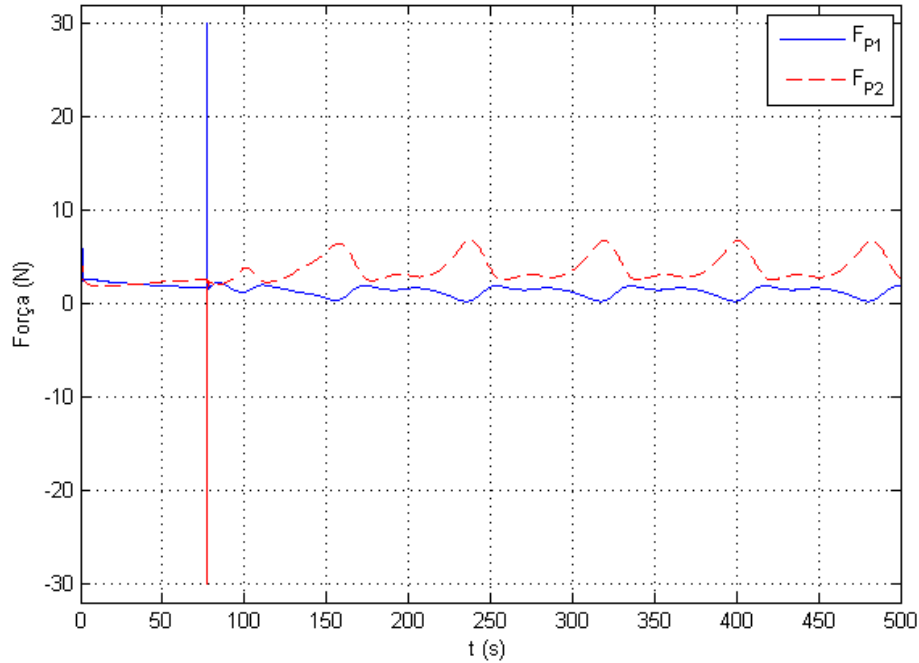


Figura 6.21 – Força exercida pelos propulsores em função do tempo para o seguimento do círculo.

6.1.7 Controlo de imobilização num ponto

Na simulação deste controlador, deseja-se que o veículo se imobilize na posição $(x_{ref}, y_{ref}) = (30, 50)$, independentemente da profundidade. A velocidade de aproximação do ponto é $u_{ref} = 2\text{ m/s}$ e a corrente considerada é $v_f = [-0.3, 0.2, 0, 0, 0]^T$.

Na figura a seguir, mostra-se a evolução da posição (x, y) em função do tempo.

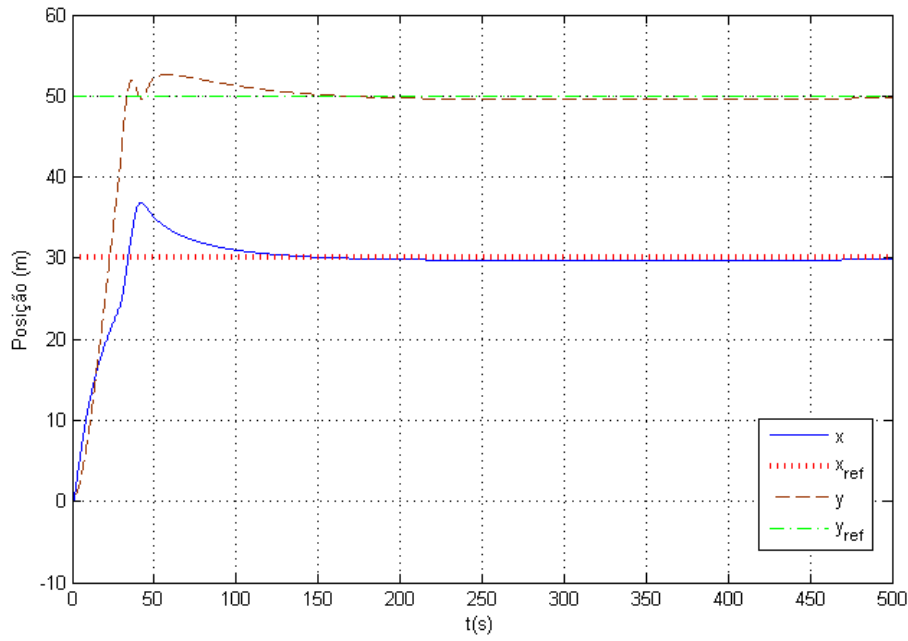


Figura 6.22 – Posição (x, y) em função do tempo para a imobilização num ponto.

Pelo exposto na secção 5.7, em regime permanente, o veículo deve estar orientado longitudinalmente e frontalmente para corrente, isto é

$$\psi = \text{atan2}(v_f, u_f) - \pi, \quad (6.2)$$

em que u_f e v_f são as componentes da velocidade da corrente no plano horizontal. Na figura a seguir, apresenta-se a evolução do ângulo segundo *yaw*, ψ , em função do tempo.

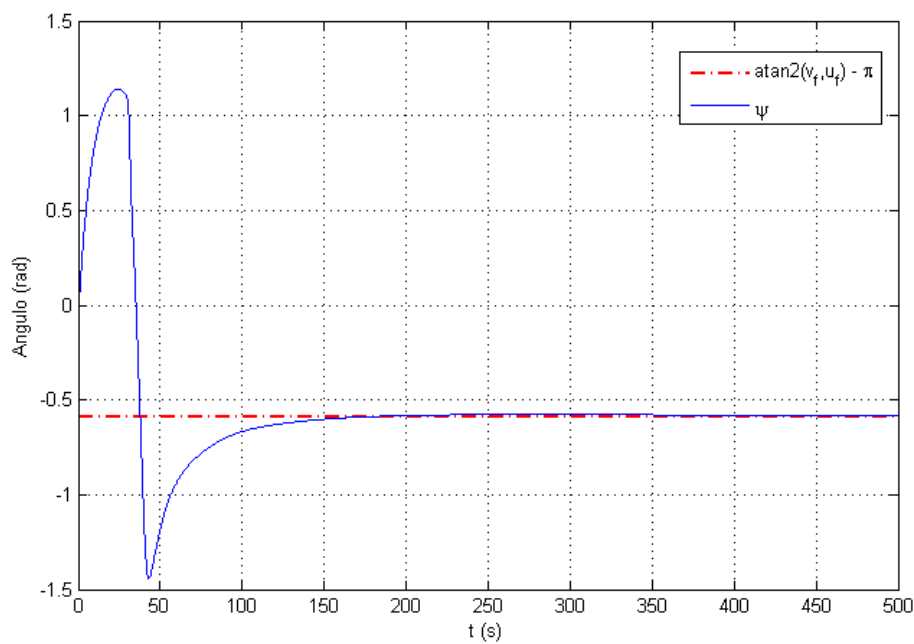


Figura 6.23 – Orientação ψ em função do tempo para a imobilização num ponto.

Durante os instantes iniciais, até $t \approx 30s$, o veículo realiza a aproximação ao ponto de referência. Nos instantes futuros, é possível observar a sua rotação para se posicionar frontalmente para a corrente, na figura 6.23.

Na figura a seguir, apresenta-se a actuação dos propulsores horizontais.

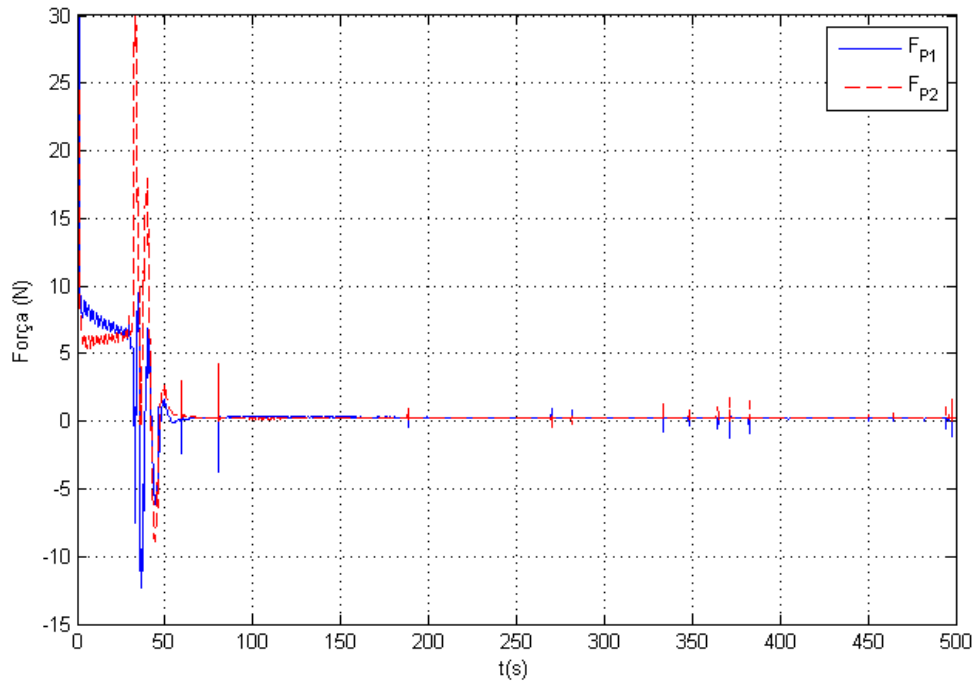


Figura 6.24 – Força exercida pelos propulsores para a imobilização num ponto.

O funcionamento real do controlador no veículo está sujeito a perturbações devidas à navegação. A posição horizontal (x,y) é obtida por acústica, o que torna o processo de actualização lento. Considera-se que é corrigida periodicamente a cada dois segundos. No intervalo que decorre entre actualizações, a posição é estimada em função das variáveis de estado. Porém, a actualização da posição está sempre afectada de um erro na ordem de um a dois metros. De forma a testar o comportamento do controlador nestas condições, soma-se um erro com valor médio nulo, e actualização a cada dois segundos, nas posições segundo x e y . Em condições de operação reais, as restantes variáveis de estado são obtidas por sensores, estando afectadas por muito menos ruído. A posição real ao longo do tempo é mostrada na figura a seguir.

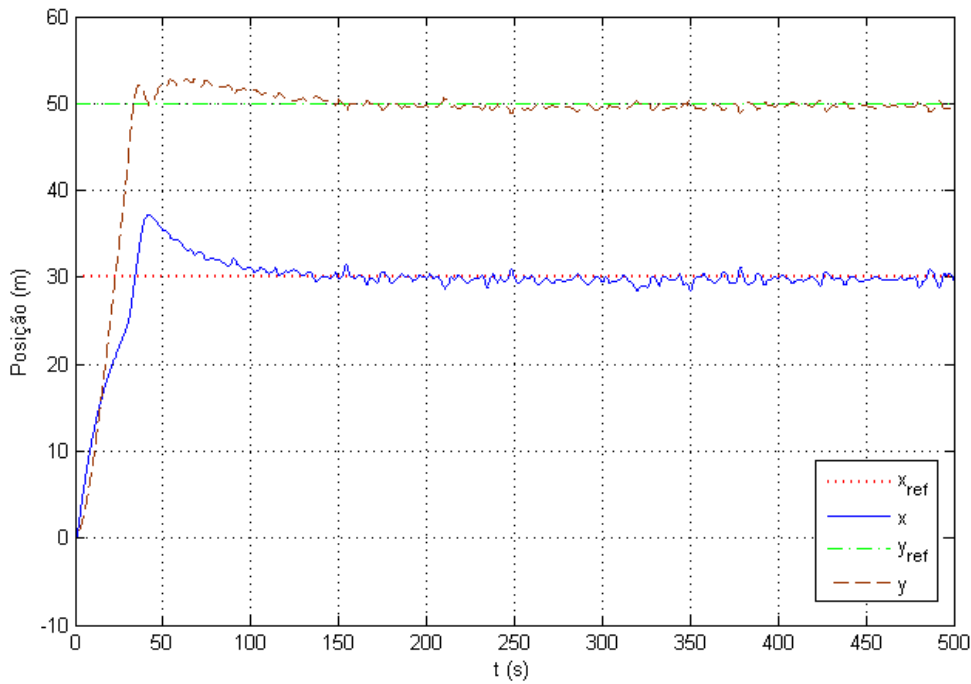


Figura 6.25 – Posição real (x, y) em função do tempo, com introdução de ruído, na imobilização num ponto.

6.2 Simulação do veículo e controlador em plataformas diferentes

O objectivo do desenvolvimento de controladores e simulador em plataformas diferentes é permitir o teste do código antes da sua implementação no veículo. O veículo está dotado de uma *PCStack 104* programada em C++ (Matos, et al., 2009). É através deste módulo que o controlo do veículo é realizado periodicamente a uma taxa de 5Hz. Em cada ciclo de controlo as variáveis de entrada do sistema (propulsores) são calculadas e impostas.

Assim, codificaram-se, em C++, os controladores determinados no Capítulo 5, obtendo uma versão de implementação para o AUV MARES. O simulador do veículo é realizado no Simulink do Matlab. A interface entre controladores e simulador do veículo é realizada de forma transparente através do protocolo de comunicação UDP (*User Datagram Protocol*). O estado é enviado pelo simulador através de um vector de *doubles* (Sahni, 1998), que contém todas as suas variáveis necessárias ao controlo:

$$X = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi, u, v, w, p, q, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T. \quad (6.3)$$

Depois de determinadas as variáveis de controlo (força dos propulsores), são enviadas sob a forma de vector, através do mesmo protocolo de comunicação:

$$f_p = [F_{P1}, F_{P2}, F_{P3}, F_{P4}]. \quad (6.4)$$

Assim, os controladores implementados podem ser testados através da sua compilação em ficheiro executável, ou até implementado directamente no MARES, sendo necessário o uso das

comunicações por UDP em ambos os casos. O simulador, por sua vez, implementado em Simulink, tem de ser executado num PC (*Personal Computer*) com o Matlab instalado. Este poderá ser o mesmo em que o ficheiro dos controladores é executado, sendo apenas necessário, em qualquer combinação controladores-simulador configurar os endereços IP (*Internet Protocol*) de recepção e envio.

Com o objectivo de recriar as condições de funcionamento do sistema, o simulador do veículo envia as suas variáveis de estado e aguarda pela recepção das variáveis de actuação enviadas pelos controladores. Após a recepção são simulados 200 milissegundos (tempo de simulação) e são novamente enviadas as variáveis de estado para o controlador, repetindo-se o ciclo. Do lado do controlador, o funcionamento é semelhante: após a recepção das variáveis de estado, são calculados os valores da actuação (variáveis de controlo) e enviados para o simulador, aguardando posteriormente pela recepção dos novos valores das variáveis de estado. A figura abaixo ilustra o algoritmo seguido na implementação de controladores e simulador do AUV MARES em plataformas diferentes.

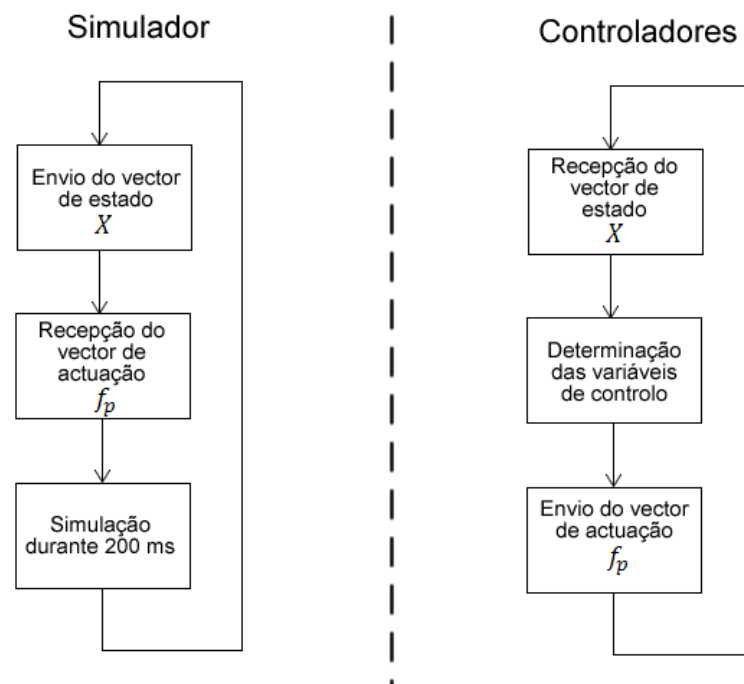


Figura 6.26 – Algoritmo seguido na implementação do simulador do veículo e controladores em plataformas diferentes.

Nas subsecções a seguir apresentam-se os resultados obtidos para a simulação dos vários controladores. De forma a verificar o comportamento do sistema sob diversas condições, realizam-se simulações para manobras diferentes da secção anterior. Apenas se apresentam os resultados de manobras com controladores de posição. Considera-se que os resultados relativos aos controladores de velocidade são redundantes, pelo que não se apresentam nesta secção.

6.2.1 Controlo de posição vertical

Simula-se o controlo do sistema com $z_{ref} = 40m$ e $\theta_{ref} = \pi/10$ sem actuação dos propulsores horizontais.

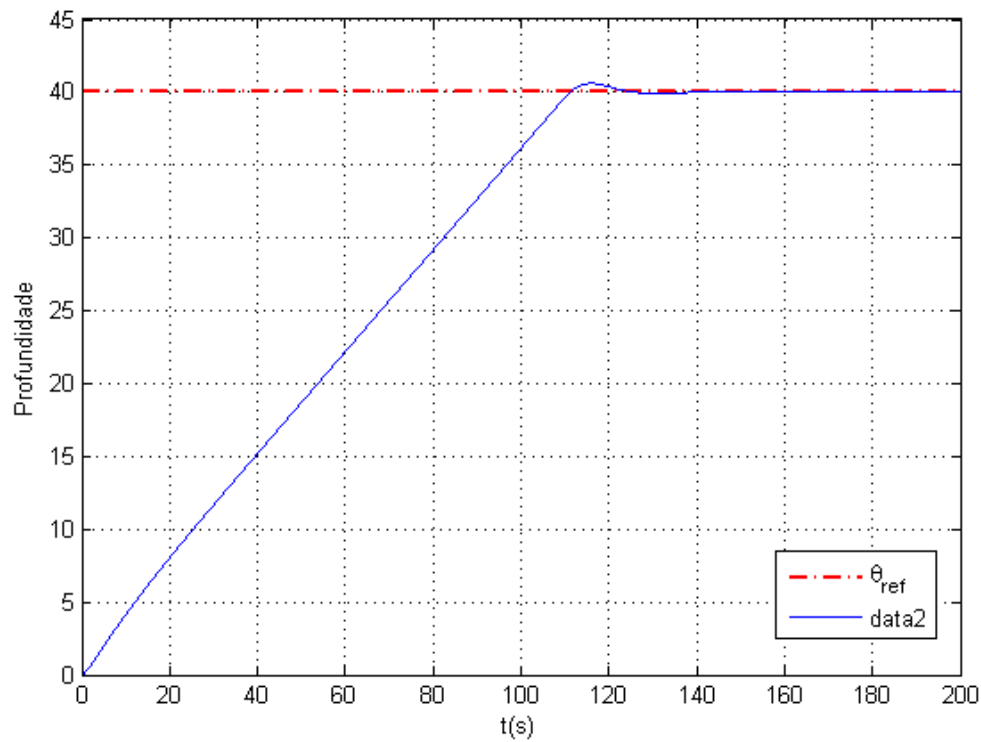


Figura 6.27 – Profundidade z em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.

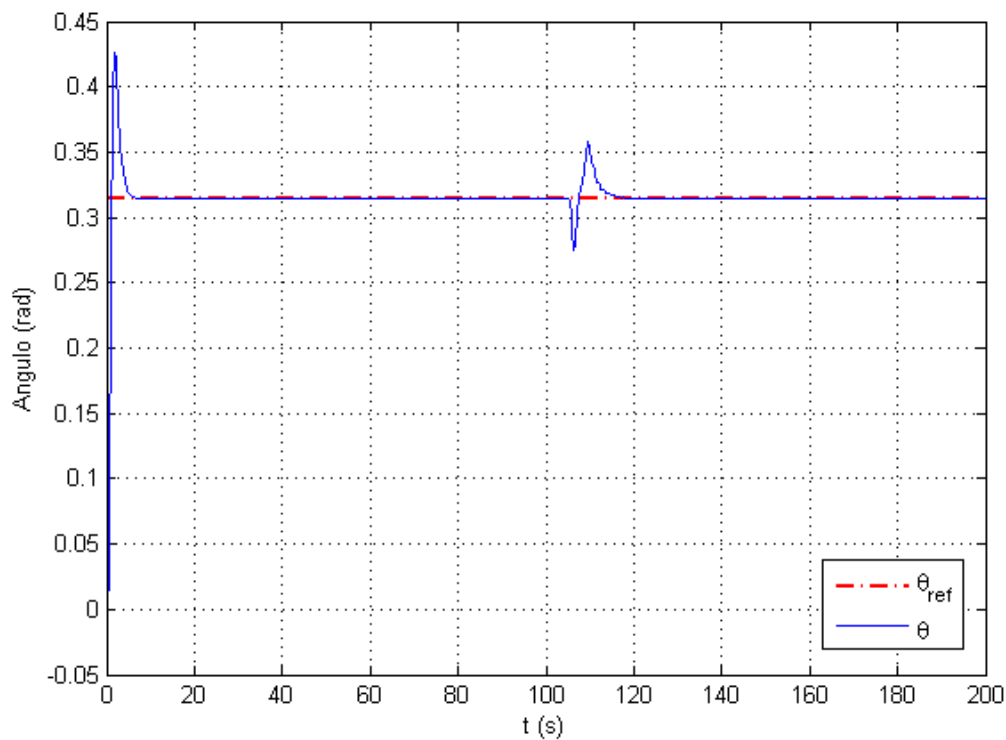


Figura 6.28 – Ângulo θ em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.

Na figura seguinte, mostra-se a actuação dos propulsores. Através da ampliação da forma de onda, observa-se a discretização no tempo (tempo do ciclo de controlo – 200 milissegundos) dos valores da actuação.

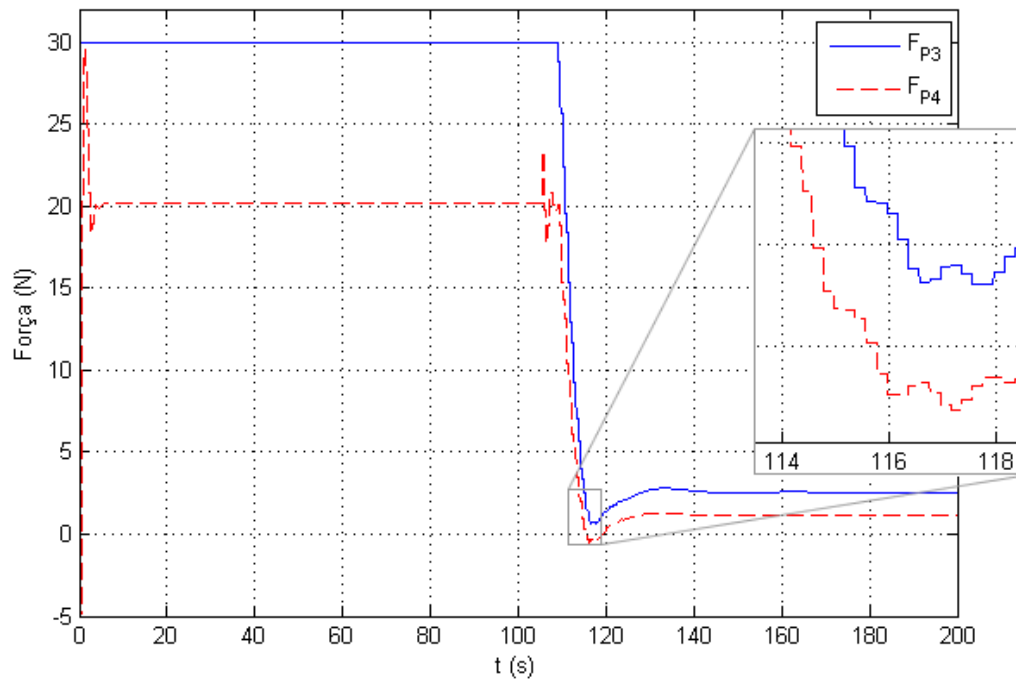


Figura 6.29 – Força exercida pelos propulsores verticais em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.

6.2.2 Controlo de seguimento de recta

No sentido de aproximar a simulação das condições de funcionamento do sistema numa missão, considera-se ruído aleatório com média nula na posição (x, y) , na ordem dos dois metros, actualizado a cada dois segundos (actualização da posição por parte do sistema acústico). Por outro lado, sabendo que podem existir divergências no valor dos termos calculados no Capítulo 3, substituem-se arbitrariamente as matrizes de *drag* e de massa acrescentada por $D'_V(u_r) = 3D_V(u_r)$ e $M'_A = M_A/2$, respectivamente. Com isto pretende-se verificar a robustez do controlador face a divergências intrínsecas ao modelo. Não se realiza qualquer alteração nas expressões controladores, nem nas suas matrizes.

Considera-se também uma corrente tal que $v_f = [0.2, 0.3, 0, 0, 0, 0]$. Os pontos da recta a seguir são dados pelos pontos $(x_1, y_1) = (0, 30)$ e $(x_2, y_2) = (-10, 0)$. Impõe-se uma velocidade de referência longitudinal $u_{ref} = 1 \text{ m/s}$ e um ângulo *pitch* $\theta_{ref} = -\pi/10$, não controlando a profundidade. Nestas condições, o veículo mergulha ao longo da trajectória, dada a sua orientação vertical com o nariz a apontar para o fundo.

Na figura a seguir, mostra-se a trajectória “real” seguida pelo veículo.

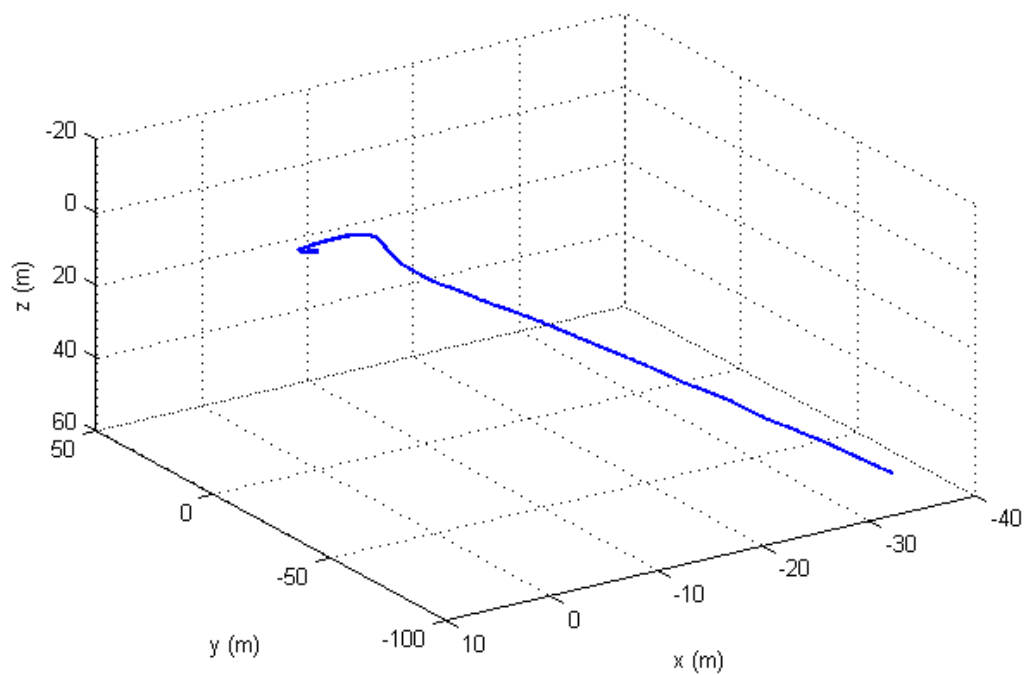


Figura 6.30 – Trajectória descrita pelo veículo com o seguimento de uma recta para controladores e simulador em plataformas diferentes.

O ângulo ψ realizado pelo veículo ao longo da sua trajectória é apresentado na figura a seguir. Note-se que, em regime permanente, existe alguma variação do seu valor. Isto deve-se ao ruído na posição. Também se pode observar que o valor médio do ângulo é diferente do ângulo da recta a seguir, dado por $\text{atan2}(y_2 - y_1, x_2 - x_1)$. Tal comportamento deve-se à compensação do efeito de arrastamento do veículo pela corrente.

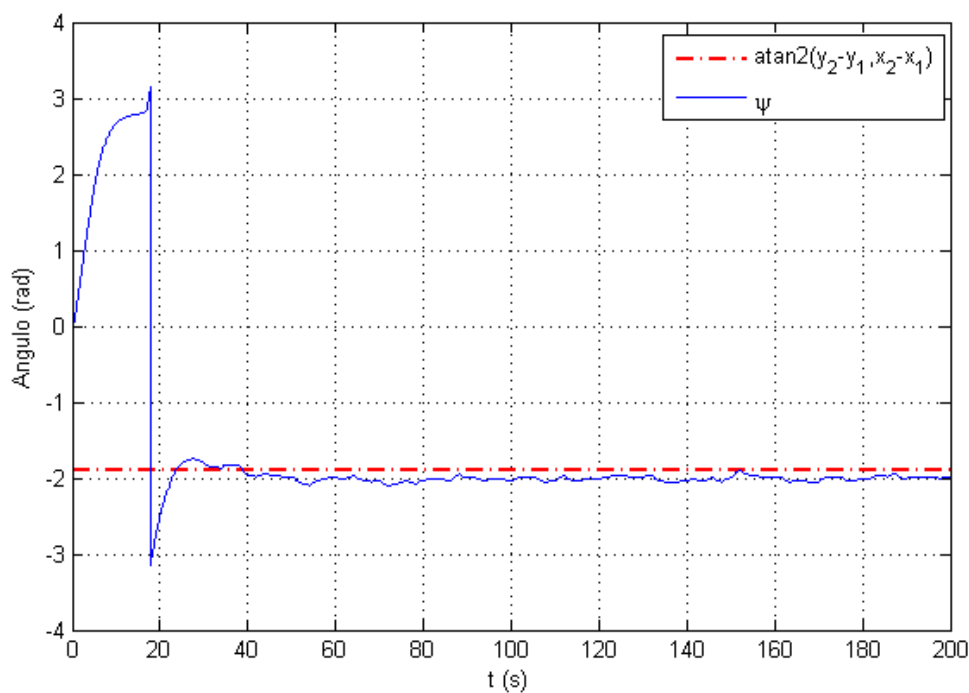


Figura 6.31 – Ângulo ψ em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.

Na próxima figura, mostra-se a velocidade longitudinal u em função do tempo, durante a trajectória. Em regime permanente, o seu valor diverge um pouco do seu valor de referência, devido a forças de *drag* mais elevadas (D'_V). Por outro lado, a expressão de controlo de velocidade horizontal (expressão(5.28)) apenas possui um ganho proporcional do erro, sendo apenas possível um erro nulo em regime permanente se se adicionasse um ganho integral. As pequenas variações de velocidade devem-se à saturação dos propulsores aquando da rotação segundo *yaw*, que, como se verifica na figura anterior, está sempre a acontecer em regime permanente como consequência do ruído de posição.

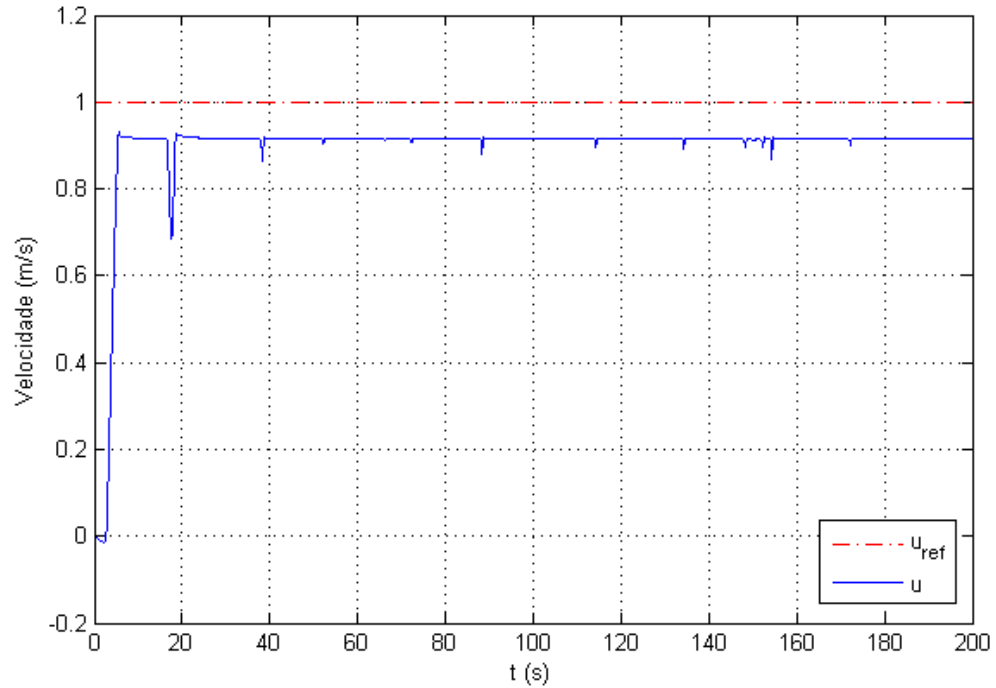


Figura 6.32 – Velocidade longitudinal em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.

6.2.3 Controlo de seguimento de circunferência

Para a demonstração do funcionamento deste controlador, aplicam-se as referências $(x_c, y_c) = (30, -30)$ e $R = 5m$ para o centro e raio da circunferência a seguir, respectivamente. Esse seguimento deve ser realizado a $z_{ref} = 20m$ de profundidade, com um ângulo *pitch* $\theta_{ref} = \pi/10$ e uma velocidade longitudinal $u_{ref} = 1m/s$. Considera-se uma corrente com velocidade constante $v_f = [0.2, 0.3, 0, 0, 0, 0]$ e ruído na posição semelhante ao descrito na subsecção anterior (na ordem de 1 a 2m).

Com o objectivo de testar a sensibilidade do controlador à divergência dos parâmetros, arbitra-se $D'_V(v_r) = D_V(v_r)/2$ e $M'_A = 3M_A$, para o simulador do veículo.

Apresenta-se a trajectória descrita pelo veículo e o valor das posições x e y ao longo do tempo nas duas figuras a seguir.

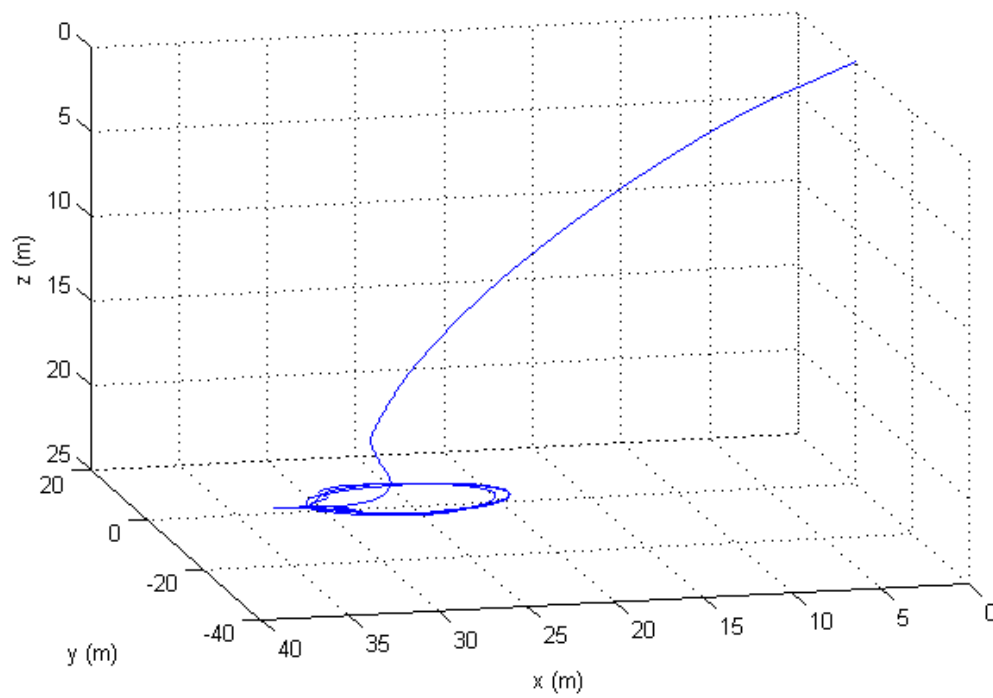


Figura 6.33 – Trajectória descrita pelo veículo para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.

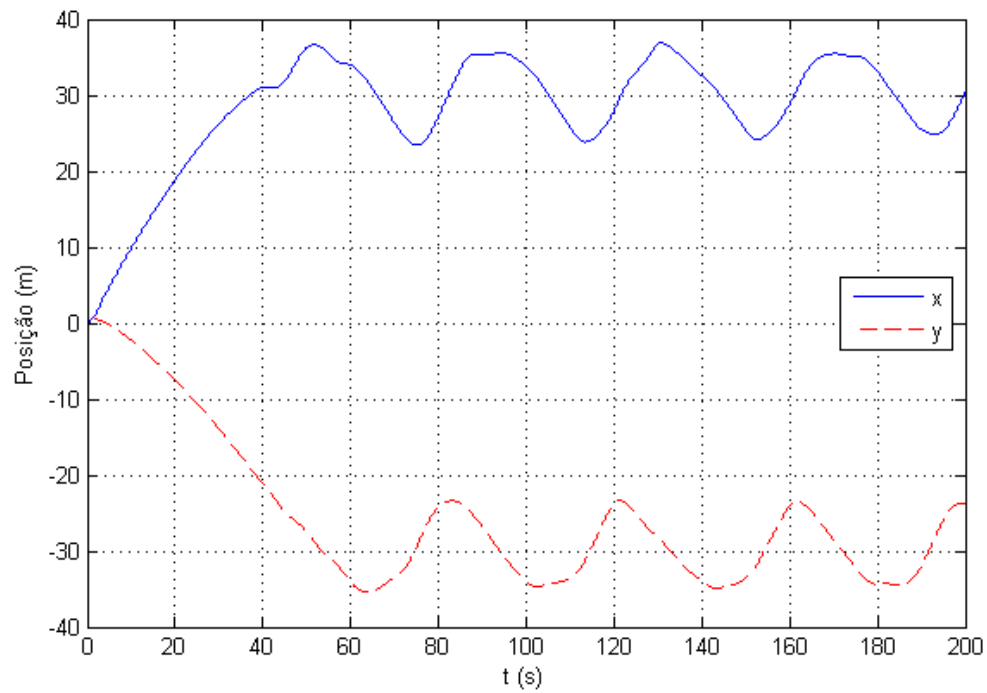


Figura 6.34 – Posição (x, y) do veículo no plano horizontal para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.

Na figura a seguir, mostra-se o valor do ângulo θ em função do tempo. Pode-se constatar que, em regime permanente, existem algumas perturbações. Estas devem-se a termos como $M_{|u|u}|u|u$ e $M_{\ddot{u}}\ddot{u}$.

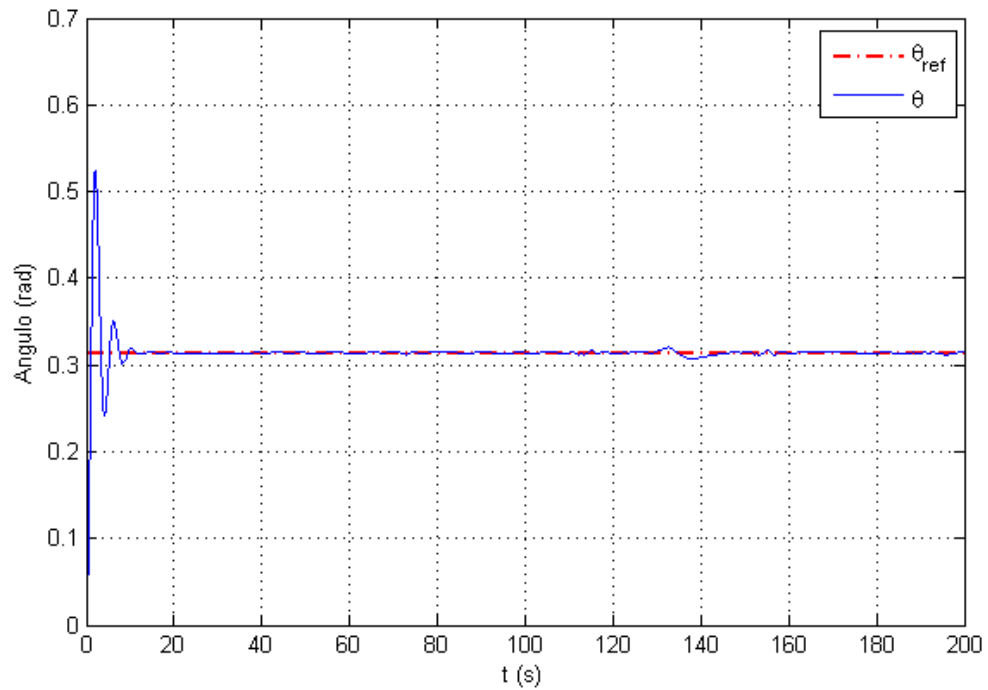


Figura 6.35 – Ângulo θ em função do tempo para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.

Na figura abaixo, mostra-se a actuação dos propulsores durante um intervalo de tempo. Não se apresenta o gráfico para os restantes instantes de tempo tendo em conta que as duas formas de onda se tornam indistinguíveis.

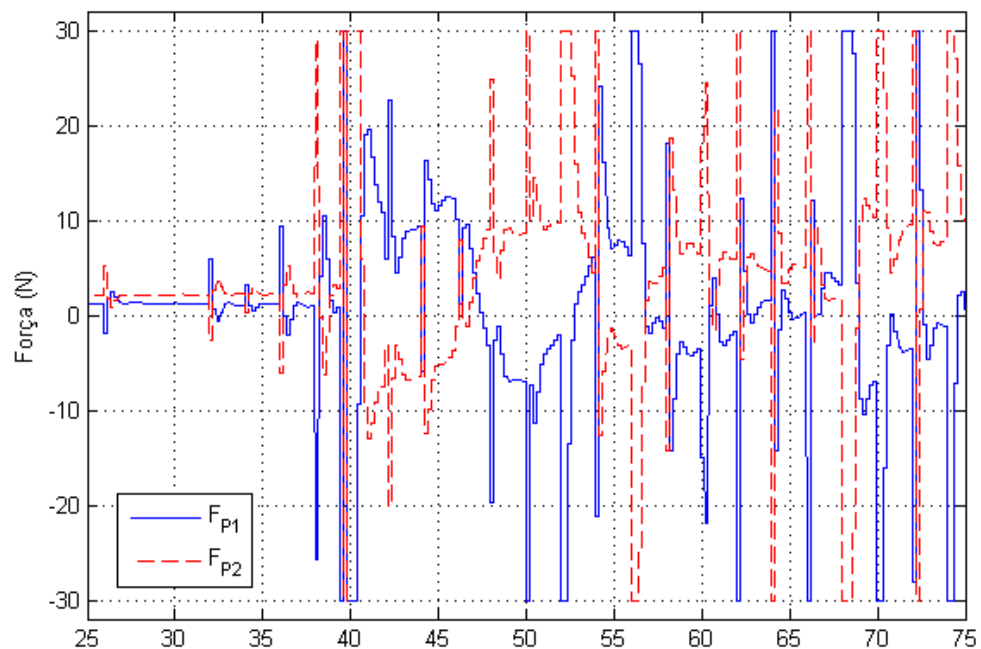


Figura 6.36 – Força exercida pelos propulsores horizontais em função do tempo para o seguimento de uma circunferência com controladores e simulador em plataformas diferentes.

6.2.4 Controlo de imobilização num ponto

Atribui-se uma referência tal que $(x_{ref}, y_{ref}) = (-40, -30)$ com uma velocidade de aproximação $u_{ref} = 2m/s$. Dado que, em regime permanente, no ponto e referência, o veículo se orienta com o nariz de frente para a corrente, se o ângulo segundo *pitch* for negativo (nariz a apontar para o fundo), o veículo mergulha se não existir controlo de profundidade. Assim impõe-se $\theta_{ref} = -\pi/10$ e não se realiza controlo de profundidade. Considera-se o ruído de posição e que a corrente possui uma velocidade $v_f = [0.2, 0.3, 0, 0, 0, 0]$.

Na figura seguinte, mostra-se a trajetória do veículo nas condições referidas.

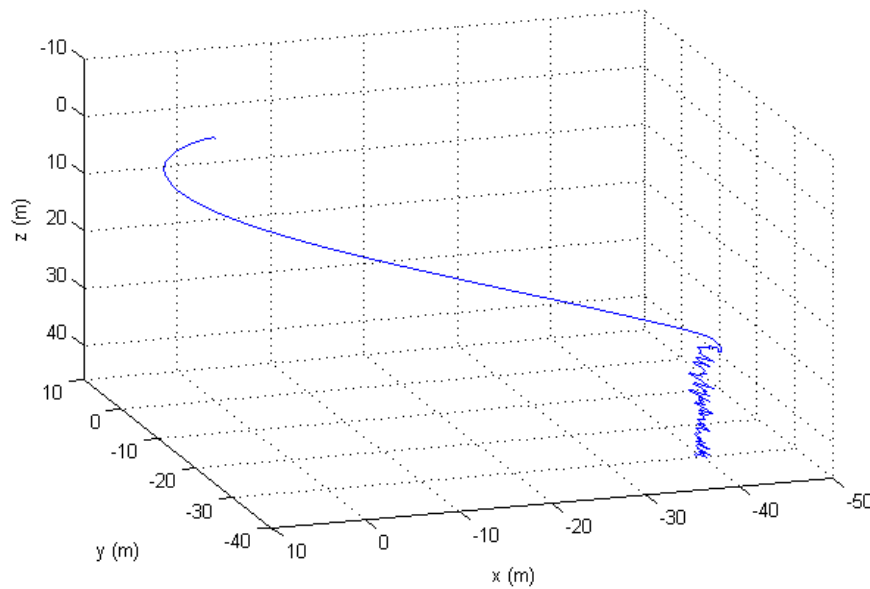


Figura 6.37 – Trajetória descrita pelo veículo para a imobilização num ponto com controladores e simulador em plataformas diferentes.

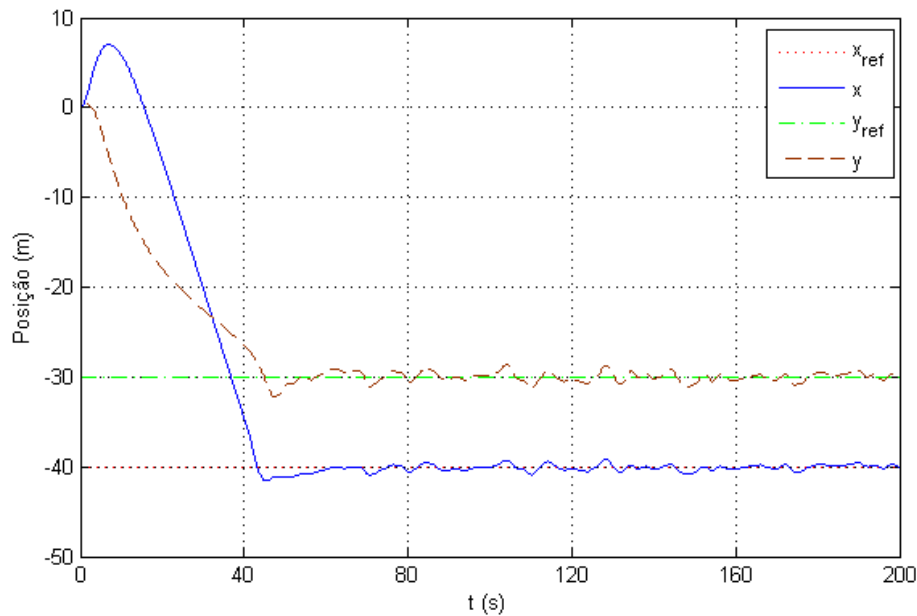


Figura 6.38 – Posição horizontal (x, y) do veículo em função do tempo com controladores e simulador em plataformas diferentes.

Em regime permanente, no ponto de referência, o veículo deve estar orientado com o nariz de frente para a corrente, longitudinalmente, isto é $\psi = \text{atan2}(v_f, u_f)$, de forma a não ser arrastado lateralmente. Na figura seguinte, mostra-se a evolução de ψ ao longo do tempo. Verifica-se que ψ varia constantemente devido ao efeito do ruído na posição.

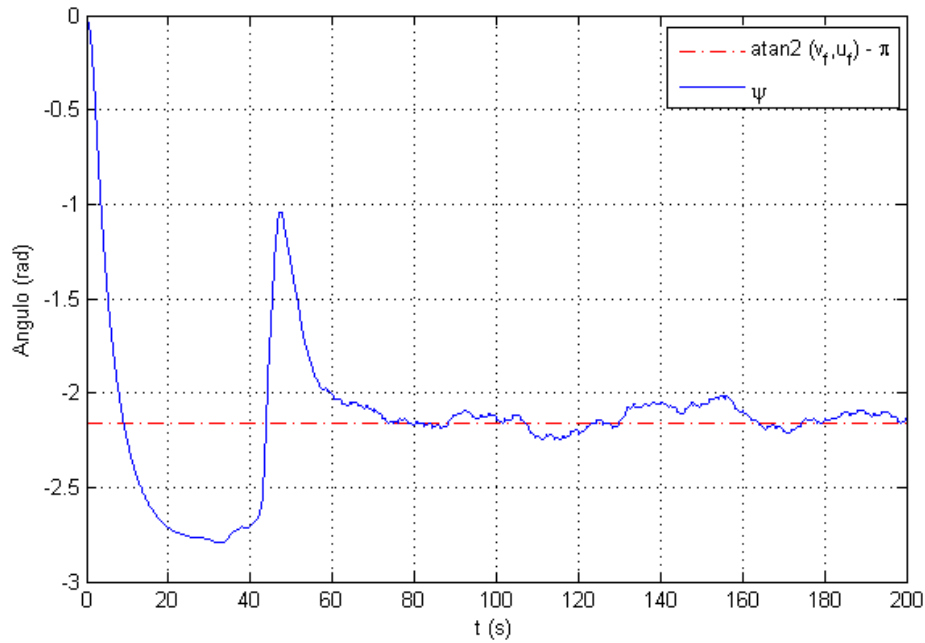


Figura 6.39 – Ângulo ψ para a imobilização num ponto com controladores e simulador em plataformas diferentes.

Capítulo 7

Resultados experimentais

No âmbito deste trabalho, realizaram-se testes no rio Douro com o AUV MARES. Com o objectivo de comprovar o valor de alguns parâmetros do modelo executaram-se algumas manobras, recolhendo periodicamente, em intervalos de tempo de 100ms, as variáveis de estado do veículo. Para tal, foi necessário o uso dos sensores de bordo do MARES.

7.1 Amortecimento viscoso segundo *yaw*

Na secção 4.2.2, analisaram-se os limites de actuação para o movimento segundo *yaw*. Realizaram-se considerações para determinar o valor da força de actuação em função da velocidade de rotação. Neste caso, deseja-se analisar o comportamento do veículo em função de uma determinada actuação imposta.

7.1.1 Considerações

Em regime permanente, recorda-se que a expressão da dinâmica, para um movimento com apenas velocidade angular r constante, pode ser reescrita da seguinte forma

$$N_{r|r}|r| = y_{P1}F_{P1} + y_{P2}F_{P2}. \quad (7.1)$$

Impondo forças F_{P1} e F_{P2} simétricas (de modo a não existir movimento longitudinal) e conhecendo o valor de r ao longo do seu movimento, é possível determinar o coeficiente de *drag* $N_{r|r}$. No entanto, na realidade, as variáveis de entrada do sistema F_{P1} e F_{P2} não são acessíveis directamente. Dado que os propulsores são constituídos por motores de corrente contínua (DC) de ímanes permanentes, actua-se na sua alimentação através da tensão aplicada nos seus terminais. A função de transferência destes ($F_P(V_a)$), em que V_a é a tensão aplicada na armadura) é não linear.

Sabe-se que, regime permanente, a tensão aplicada na armadura é dada por

$$V_a = R_a I_a + E_a, \quad (7.2)$$

em que $R_a \in \mathbb{R}$ é a resistência da armadura, $I_a \in \mathbb{R}$ a corrente da armadura e $E_a \in \mathbb{R}$ é a força electromotriz do motor. Se se considerar $R_a \approx 0$ (em geral esta resistência possui um valor reduzido), tem-se

$$V_a \approx E_a. \quad (7.3)$$

Por sua vez,

$$E_a = K n \quad (7.4)$$

em que $K \in \mathbb{R}$ uma constante e n a velocidade de rotação do propulsor.

Relembrando a expressão da força exercida por um propulsor (expressão (2.45)),

$$T = \rho_f D^4 n^2 \left[c_1 \left(\frac{v_a}{Dn} \right)^2 + c_2 \left(\frac{v_a}{Dn} \right) + c_3 \right], \quad (7.5)$$

no movimento somente rotativo, a velocidade de avanço é pequena, podendo considerar-se $v_a \approx 0$. Assim, resulta

$$T \approx \rho_f D^4 n^2 c_3. \quad (7.6)$$

Usando as expressões (7.3)-(7.5), deduz-se facilmente

$$T \propto V_a^2 \quad (7.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_{P1} &\propto V_{a1}^2, \\ F_{P2} &\propto V_{a2}^2, \end{aligned} \quad (7.8)$$

em que V_{ai} é a tensão aplicada ao motor do propulsor i .

Sabendo que à tensão nominal $V_{aN} = 19V$ deve corresponder a força nominal $F_{PN} = 21.5N$, com $v_a \approx 0$, obtém-se facilmente

$$\begin{aligned} F_{P1} &= F_{PN} \left(\frac{V_{a1}}{V_{aN}} \right)^2, \\ F_{P2} &= F_{PN} \left(\frac{V_{a2}}{V_{aN}} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

7.1.2 Teste

Na missão de teste do veículo, aplicaram-se as tensões mostradas no gráfico a seguir aos propulsores $P1$ e $P2$.

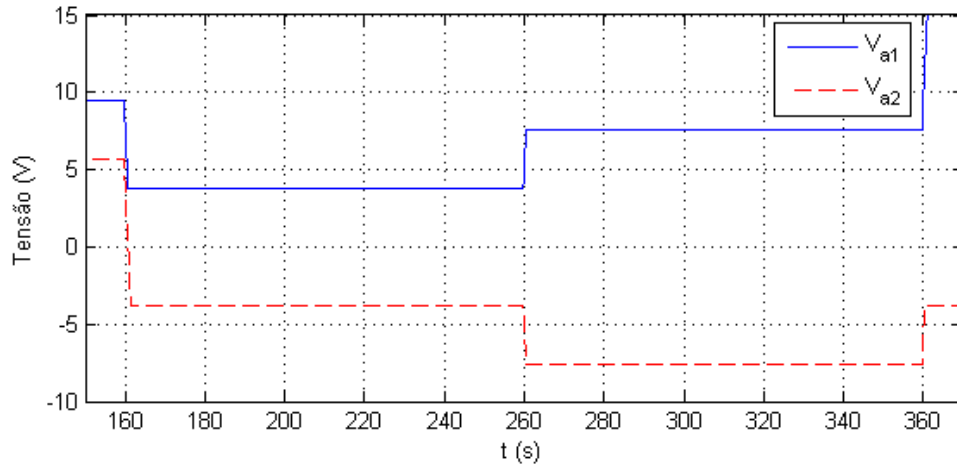


Figura 7.1 – Tensão aplicada aos propulsores em função do tempo durante os testes.

A esta tensão aplicada nos motores, corresponde o ângulo ψ ao longo do tempo que se mostra na figura a seguir.

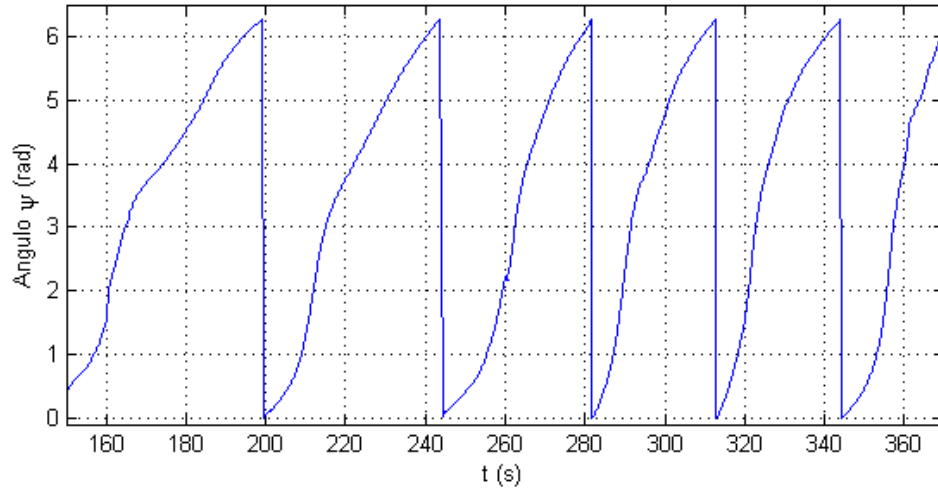


Figura 7.2 – Ângulo ψ em função do tempo durante os testes.

Na figura acima, observa-se que a variação de ψ não é linear ao longo do tempo. Porém, este resultado está falseado por falta de calibração da bússola do veículo e por campos magnéticos presentes no interior e no exterior do invólucro do veículo. Acredita-se que, na realidade, esta variação é linear em regime permanente.

Dos gráficos das figuras acima, extraem-se resultados para dois regimes de funcionamento nos intervalos $[160,260]$ e $(260,360]$. Para o primeiro intervalo extraem-se os seguintes dados, usando a expressão (7.9):

$$F_{P1} = -F_{P2} = 8.62 \cdot 10^{-1} N \quad (7.10)$$

e

$$r = 1.28 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s.} \quad (7.11)$$

Recorrendo à expressão (7.1) resulta $N_{|r|r} = -11.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Para o intervalo de tempo $(260, 360]$, $F_{p1} = -F_{p2} = 3.44 \text{ N}$ e $r = 2.03 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$. Pela expressão (7.1), deduz-se facilmente que $N_{|r|r} = -18.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

O primeiro resultado obtido está próximo do obtido teoricamente. Já o segundo diverge um pouco. Isto pode dever-se ao facto das forças de propulsão não serem verdadeiramente simétricas sabendo que as forças exercidas poderão ser diferentes, em módulo, para velocidades de rotação simétricas. Por outras palavras, a rotação das hélices dos propulsores a velocidades iguais mas em sentido oposto poderão provocar forças diferentes, em módulo. Por outro lado, o uso da aproximação da expressão (7.6) é tanto mais inadequado quanto mais elevada for a velocidade angular r (em módulo), tendo em conta que a velocidade de avanço se distanciará de zero.

7.2 Raio de curvatura

7.2.1 Considerações

A expressão de força de propulsão (7.5) é uma função quadrática da velocidade de avanço. Dado que as folhas de características dos propulsores (Seabotix, 2009) possuem pouca informação relativamente à força em função da velocidade de avanço, é difícil estimar os coeficientes c_1 e c_2 . A determinação prática implicaria o arrastamento do propulsor a diferentes velocidades ao mesmo tempo que se realizaria a medição da força exercida. Este exercício revela-se difícil de realizar sem o equipamento e instalações necessários. Uma possibilidade seria o uso de um *tow tank* (tanque dotado de um reboque que se desloca a velocidades definidas, permitindo obter dados relativos a forças que actuam no objecto rebocado) (Presterio, 2001), por exemplo.

Assim, para a determinação de raios de curvatura em função da força de propulsão aplicada, consideram-se apenas velocidades de avanço próximas de zero. Para tal, é necessário que seja aplicado um modo comum baixo mas diferente de zero, de modo que o veículo não realize rotações sobre si próprio.

7.2.2 Teste

Através do uso da expressão (7.9), estima-se que as forças aplicadas num teste são $F_{p1} = 13.8 \text{ N}$ e $F_{p2} = -3.45 \text{ N}$, resultando, um raio de curvatura $R_{exp} \approx 1.7 \text{ m}$. Este resultado está afectado pelo erro e ruído intrínseco à acústica que não é desprezável, neste caso. Porém, assumindo que o ruído possui média nula, o cálculo da média de várias amostras, permite-nos determinar R_{exp} , embora com algum erro.

Na figura a seguir, mostra-se a trajectória descrita pelo veículo, resultante da simulação para as mesmas forças aplicadas pelos propulsores horizontais. O raio de curvatura resulta $R_{sim} \approx 2.7 \text{ m}$. Estes resultados indicam uma discrepância.

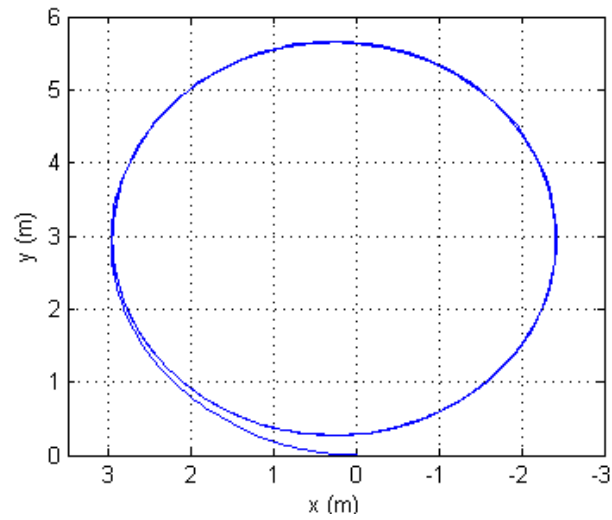


Figura 7.3 – Trajectória obtida na simulação para $F_{P1} = 13.8 \text{ N}$ e $F_{P2} = -3.45 \text{ N}$.

Com este resultado, é difícil tirar conclusões sabendo que existe uma incerteza considerável nos dados recolhidos relativos ao posicionamento do veículo ao longo do tempo. Por outro lado, a aproximação realizada para o cálculo da força aplicada pelos propulsores pode ser inadequada, tendo em conta que a velocidade de avanço v_a é diferente de zero e não se conhecem os valores dos parâmetros c_1 e c_2 .

Capítulo 8

Conclusões

8.1 Síntese do trabalho realizado

Nos capítulos anteriores, determinou-se um modelo não linear do veículo, expondo todas as expressões de determinação dos coeficientes. Deve-se salientar que existe alguma incerteza em alguns dos parâmetros, nomeadamente nos de *drag*, tendo em conta que o seu cálculo assenta em fórmulas semi-empíricas apoiadas em resultados experimentais em muitos casos, como se verifica em (Hoerner, 1965), (Presterio, 2001) ou (Geisbert, 2007). No entanto, os resultados experimentais permitiram validar alguns termos do modelo, embora os testes que recorreram à posição absoluta do veículo estejam afectados por uma incerteza considerável devido ao erro intrínseco ao uso da acústica.

A determinação do modelo, distinguindo as diferentes forças que actuam no veículo, permitiu o desenvolvimento de controladores de velocidade vertical e horizontal adequados ao MARES. Posteriormente, desenvolveram-se leis de controlo para a posição absoluta do veículo, desacoplando o movimento vertical e horizontal. Começou-se por determinar dois controladores de posição vertical, cujos comportamentos e desempenhos foram comparados no capítulo 7, que permitem que o veículo permaneça a uma profundidade arbitrária até 100m com um ângulo *pitch* não nulo. Prosseguiu-se com o desenvolvimento dos controladores de posição horizontal capazes de determinar as actuações necessárias para o seguimento de uma recta e de uma circunferência imaginárias com velocidade longitudinal definida de forma independente. Por fim, determinou-se um controlador de imobilização do veículo num ponto.

Conhecendo as limitações do posicionamento por acústica, principalmente no que diz respeito ao ruído e à latência, realizou-se uma simulação do modelo completo (ordem 6) e dos seus controladores sob condições semelhantes, comprovando a robustez dos mesmos. Considerou-se também o efeito da corrente que, em condições de operação, não é desprezável.

Com o objectivo de obter uma aproximação ainda mais próxima da realidade, realizou-se um simulador do MARES que opera com as mesmas características de navegação e de controlo, como são exemplo o ruído e os ciclos de controlo (controlo discreto). Com este, é possível testar o código de controlo, na sua versão de implementação no MARES, através de uma interface de comunicação. Assim, definindo parâmetros como a corrente e ruído esperado, pode-se simular o decorrer de uma missão antes da sua realização, observando o comportamento do veículo sob as

condições definidas, sem existir a necessidade de traduzir o código da missão implementado para outra versão.

8.2 Perspectivas de trabalho futuro

8.2.1 Determinação do modelo dos propulsores

Embora tenha existido esforços no decorrer deste trabalho no sentido de determinar a resposta em força dos propulsores em função dos diversos parâmetros que a influenciam, não foi possível obter resultados sólidos, por falta de meios. Seria interessante verificar os seus desempenhos em função da velocidade de avanço e da tensão que lhes é aplicada, mas como se referiu no capítulo 7, isto implicaria arrastar os propulsores a várias velocidades com diferentes tensões, de modo a obter uma função de transferência $T(v_a, n)$. O uso de um *tow tank* seria o mais adequado. Uma alternativa interessante seria a medição através da leitura periódica da força por um dinamómetro digital, rebocando o propulsor por um veículo de superfície, cuja velocidade se varia ao longo do tempo. Neste caso, é necessária a sincronização dos dados recolhidos da força com a velocidade do veículo bem como a permanência do propulsor na posição horizontal.

8.2.2 Determinação prática dos coeficientes do modelo

Conhecendo o modelo dos propulsores com elevada confiança, é possível determinar experimentalmente alguns dos parâmetros do modelo do veículo com precisão, como é o caso dos coeficientes de *drag* como $X_{|u|u}$, $Z_{|w|w}$, $M_{|q|q}$, $N_{|r|r}$. O uso dos controladores, neste caso, pode ser valioso pela análise das variáveis de estado e de entrada (propulsores), em regime permanente, sendo também possível realizar a determinação de alguns parâmetros, com actuação em malha aberta, como se mostrou no capítulo 7.

A alternativa a estes métodos passaria pela colocação do veículo num tanque em que se simula o efeito da corrente através da circulação de fluido. Conhecendo a velocidade do fluido ou o seu caudal, é possível determinar os coeficientes de *drag* através da medição das forças e momentos realizados sobre o veículo. No entanto, esta segunda opção pode-se revelar pouco viável dado que seria necessário um elevado caudal para recriar as condições do meio para as velocidades mais elevadas do veículo.

8.2.3 Medição da velocidade relativa do veículo

A implementação de um sensor inercial no veículo permitiria o conhecimento directo do valor das acelerações lineares e angulares. Esta implementação é vulgar em muitos veículos marítimos, mas a determinação de outras variáveis de estado como as velocidades lineares e angulares requer um integrador das acelerações, estando sujeitas a ruído e a condições iniciais incertas. De forma a obter melhores resultados, a integração de um sensor de Doppler no MARES permitiria obter a velocidade do veículo com bastante precisão e resolução. Alternativamente, conseguindo medir o caudal, é possível estimar facilmente a velocidade relativa do MARES.

8.2.4 Navegação com geração de referências para os controladores

Num nível mais elevado de abstracção, dotando o veículo de visão, seria possível gerar referência de posição ou seguimento de figuras geométricas permitindo o seguimento de objectos móveis ou estáticos na água. Esta implementação poderia constituir uma grande vantagem para as missões em que geralmente o MARES é usado, como a monitorização ambiental com navegação próxima de exutores submarinos.

Referências

Encarnação, P. e Pascoa, A. 2000. "3D Path Following for Autonomous Underwater Vehicle". Sydney, Australia : Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000.

Aguiar, A.P. e Hespanha, J.P. 2006. "Trajectory-Tracking and Path-Following of Underactuated Autonomous Vehicles with Parametric Modeling Uncertainty". IEEE, 2006.

Borenstein, J., Everett, H. R. e Feng, L. 1996. *Where am I - Systems and Methods for Mobile Robot Positioning*. Michigan : University of Michigan, 1996.

Clarke, David. 2001. "Calculation of the added mass of circular cylinders in shallow water". Newcastle, U.K. : Elsevier Science, 2001.

Cruz, N. e Matos, A. 2008. "The MARES AUV, a Modular Autonomous Robot for Environment Sampling". Proceedings of the MTS-IEEE Conference Oceans'2008, Quebec, Canada, September 2008.

Faltinsen, O. M. 2005. *Hydrodynamic of high speed marine vehicles*. Cambridge, USA, 2005.

Fossen, T. I. 1994. *Guidance and control of ocean vehicles*. Chichester, England : John Wiley and Sons, 1994.

Fossen, T. I. 1991. *Nonlinear modelling and control underwater vehicles*. Trondheim, Norway : Publicado pelo autor, 1991.

Geisbert, Jesse Stuart. 2007. "Hydrodynamic Modeling for Autonomous Underwater Vehicles Using Computational and Semi-Empirical Methods". Blacksburg, Virginia : s.n., 2007.

Gomes, Rui. 2002. *Controlo e Modelização de Veículos Subaquáticos (Tese de Mestrado FEUP)*. 2002.

Hassan, K. 2002. *Nonlinear Systems*. 3^a. Upper Saddle River, NJ : Prentice-Hall, 2002.

Hoerner, S. F. 1965. *Fluid-dynamic drag*. USA : edited by author, 1965.

Viviani, M., et al. *Identification of hydrodynamic coefficient from standard manoeuvres for a serie of twin-screw ships*. Genova, Italy : Unknow, Unknow.

Introduction to Autonomous Mobile Robots. [Online] <http://www.mobilerobots.org>.

Jones, D.A., et al. 2002. *The Calculation of Hydrodynamic Coefficients for Underwater Vehicles*. Fishermans Bend, Victoria 3207 Australia : DSTO Platforms Sciences Laboratory, 2002.

Kim, J. 2009. *Underwater Vehicles*. Áustria : s.n., 2009.

- Matlab. 2007b.** *Matlab Help files.* 2007b.
- Matos, Aníbal e Cruz, Nuno. 2009.** *Underwater Vehicles.* Capítulo 17. Austria : In-Tech, 2009.
- Moreira, A. G. M. 2008.** Transparências das aulas teóricas. Porto : s.n., 2008.
- Matos, A. e Cruz, N. 2008.** "Positioning Control of an Underactuated Surface Vessel". Québec, Canada : Proceedings of the MTS-IEEE Conference Oceans'2008, 2008.
- Prestero, T. 2001.** *Verification of a Six-Degree of Freedom Simulation Model for the REMUS Autonomous Underwater Vehicle.* California : s.n., 2001.
- Allen, B., Vorus, W.S. e Prestero, T.** "Propulsion System Performance Enhancements on REMUS AUVs". **Unknown.** Woods Hole : IEEE Xplore, Unknown.
- Sahni, Sartaj. 1998 .** *Data structures, algorithms, and applications in C++.* Boston : McGraw Hill, 1998 . 0-07-115595-3 .
- Seabotix. 2009.** Seabotix, Inc. LBV. [Online] 2009. <http://www.seabotix.com/>.
- Siegwart, R. e Nourbakhsh, I. R. 2004.** *Introduction to Autonomous Mobile Robots.* Cambridge, Massachusetts : MIT Press, 2004.
- Slotine, J.-J. E e Li, W. 1991.** *Applied Nonlinear Control.* Upper Saddle River : Prentice Hall, 1991.
- Techet, A.H. 2005.** *Hydrodynamics. Reding #6.* Massachussets, MIT : s.n., 2005.
- Tovar de Lemos, A.F. 1998.** *Tensor de inércia em referenciais ortonormados.* Lisboa : AEIST, 1998.
- V.A. 2009.** *Underwater vehicles.* Austria : Edited by A. V. Inzartsev, 2009.
- Weiss, Mark Allen. 1999.** *Data structures and algorithm analysis in C++.* Reading, Massachusetts : Addison Wesley, 1999.
- White, F. M. 1999.** *Fluid mechanics.* 4th edition. Boston : McGraw-Hill, 1999.
- Willy, Christopher John. 1994.** *Attitude Control of an Underwater Vehicle Subjected to Waves.* Massachussets : s.n., 1994.
- Yue, D. 2005b.** Marine Hydrodynamics. *Lecture 14.* Massachussets : MIT, 2005b.
- Yue, D. 2005c.** Marine Hydrodynamics. *Lecture 13.* Massachussets : MIT, 2005c.
- Yue, D. 2005a.** Marine Hydrodynamics. *Lecture 15.* Massachussets : MIT, 2005a.

Apêndice A

Conjunto de manobras realizáveis

Na tabela a seguir, mostram-se o conjunto de manobras realizáveis com as diversas combinações de controladores desenvolvidos.

Tabela A.1 – Conjunto de manobras realizáveis.

Nome manobra	Descrição manobra	Controlador(es) activo(s)	Parâmetros a definir	Observações
VerticalSpeedWQ	Descida/subida vertical com velocidade linear w_{rref} (velocidade relativa ao fluido) e angular q_{ref}	- Controlador de velocidade vertical com referências (w_{rref}, q_{ref}) .	- w_{rref} - q_{ref}	(w_{rref}, q_{ref}) podem variar ao longo do tempo. Deve-se ter particular atenção a q_{ref} para evitar ângulos críticos
GotoZTeta	Descida/subida vertical até à profundidade z_{ref} com ângulo pitch θ_{ref} sem controlo da posição horizontal	- Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade vertical; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}) ; OU (alternativamente) - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref})	- $z_{ref} > 0$ - θ_{ref} - $f_{p1} = 0$ - $f_{p2} = 0$	z_{ref} e θ_{ref} podem variar ao longo do tempo
HorizontalOpen-LoopTheta	Descida/subida vertical com ângulo pitch θ_{ref} sem controlo da posição horizontal	- Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade vertical; - Controlador de velocidade vertical com referências (w_{rref}, q_{ref}) ; OU (alternativamente) - Controlador de posição (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref})	- $z_{ref} = 0$ - θ_{ref} - f_{p1} - f_{p2}	
HorizontalOpenLoopZTheta		- Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que	- $z_{ref} > 0$ - θ_{ref}	z_{ref} e θ_{ref} podem variar ao

		gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade vertical; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); OU (alternativamente) - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref})	- f_{p1} - f_{p2}	longo do tempo
XbYbPlaneSpeedUR	Descida/subida no plano (x_B, y_B) com ângulo pitch θ_{ref} com controlo da velocidade linear u_{ref} e angular r_{ref}	- Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). OU (alternativamente) - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}).	- $z_{ref} = 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - r_{ref}	(z_{ref}, θ_{ref}) e (u_{ref}, r_{ref}) podem variar ao longo do tempo. z_{ref} deve ser nulo (controlo da profundidade desligado). A descida ou subida dependem dos sinais de θ_{ref} e u_{ref} .
GotoXYTheta	Descida/subida no plano (x_B, y_B) com ângulo pitch θ_{ref} com controlo da posição horizontal (x_{ref}, y_{ref})	- Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal com as referências (x_{ref}, y_{ref}). Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}) - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). OU (alternativamente) - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal com as referências (x_{ref}, y_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}).	- $z_{ref} = 0$ - θ_{ref} - u_{ref} (velocidade de aproximação do ponto) - x_{ref} - y_{ref}	(z_{ref}, θ_{ref}) e (x_{ref}, y_{ref}) podem variar ao longo do tempo. z_{ref} deve ser nulo (controlo da profundidade desligado). A descida ou subida dependem dos sinais de θ_{ref} e u_{ref} .
GotoXYZTheta	Movimento no plano horizontal $z = z_{ref}$ com ângulo pitch θ_{ref}	- Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal com as referências (x_{ref}, y_{ref}). Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). OU (alternativamente) - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal com as referências (x_{ref}, y_{ref}). Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade	- $z_{ref} > 0$ - θ_{ref} - u_{ref} (velocidade de aproximação do ponto) - x_{ref} - y_{ref}	(z_{ref}, θ_{ref}) e (x_{ref}, y_{ref}) podem variar ao longo do tempo. z_{ref} deve ser positivo (controlo da profundidade ligado). A imposição de θ_{ref} demasiado elevado pode provocar saturação dos propulsores, em regime permanente levando à instabilidade do

		horizontal com as referências (u_{ref} , r_{ref}).		movimento vertical. $\theta_{ref\ max}$ depende da velocidade u .
LineTheta	Seguimento de uma recta horizontal com descida/subida com ângulo pitch θ_{ref}	<ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento recta) com as referências (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos da recta. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). <p>OU (alternativamente)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento linha) com as referências (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos da recta. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}). - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). 	<ul style="list-style-type: none"> - $z_{ref} = 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - (x_1, y_1) - (x_2, y_2) 	z_{ref} deve ser nulo (controlo da profundidade desligado). A descida ou subida dependem dos sinais de θ_{ref} e u_{ref} .
LineZTheta	Seguimento de uma recta horizontal com profundidade z_{ref} e ângulo pitch θ_{ref}	<ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento recta) com as referências (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos da recta. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). <p>OU (alternativamente)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento recta) com as referências (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos da recta. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). 	<ul style="list-style-type: none"> - $z_{ref} > 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - (x_1, y_1) - (x_2, y_2) 	z_{ref} deve ser positivo (controlo da profundidade ligado). A imposição de θ_{ref} demasiado elevado pode provocar saturação dos propulsores, em regime permanente levando à instabilidade do movimento vertical. $\theta_{ref\ max}$ depende da velocidade u .
SpeedUThetaPsi	Deslocação com velocidade u , ângulo horizontal ψ e vertical θ	<ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal (ângulo ψ) com as referências ψ. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade 	<ul style="list-style-type: none"> - $z_{ref} = 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - ψ_{ref} 	

		<p>horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}).</p> <p>OU (alternativamente)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal (ângulo ψ) com as referências ψ. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). 		
SpeedUZThetaPsi	Deslocação com velocidade u , ângulo horizontal ψ e vertical θ e profundidade z	<ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal (ângulo ψ) com as referências ψ. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). <p>OU (alternativamente)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal (ângulo ψ) com as referências ψ. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). 	<ul style="list-style-type: none"> - $z_{ref} > 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - ψ_{ref} 	
CircTheta	Seguimento de uma circunferência com raio R centrada no ponto (x_c, y_c) com descida/subida com ângulo pitch θ_{ref} (helicóide)	<ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com referências (w_{rref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento circunferência) com as referências (x_c, y_c) e R como centro e raio da circunferência, respectivamente. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). <p>OU (alternativamente)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento circunferência) com as referências (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos da recta. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). 	<ul style="list-style-type: none"> - $z_{ref} = 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - (x_c, y_c) - R - CW 	<p>z_{ref} deve ser nulo (controlo da profundidade desligado). A descida ou subida dependem dos sinais de θ_{ref} e u_{ref}.</p>
CircZTheta	Seguimento de uma circunferência com raio R centrada no ponto (x_c, y_c) com	<ul style="list-style-type: none"> - Controlador de posição vertical (2) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}) que gera uma referência (w_{rref}, q_{ref}) para o controlador de velocidade; - Controlador de velocidade com 	<ul style="list-style-type: none"> - $z_{ref} > 0$ - θ_{ref} - u_{ref} - (x_c, y_c) - R 	<p>z_{ref} deve ser positivo (controlo da profundidade ligado). A</p>

	profundidade z_{ref} e ângulo pitch θ_{ref}	referências (w_{ref}, q_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento circunferência) com as referências (x_c, y_c) e R como centro e raio da circunferência, respectivamente. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}). OU (alternativamente) - Controlador de posição vertical (1) com as referências (z_{ref}, θ_{ref}); - Controlador de posição horizontal (seguimento circunferência) com as referências (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos da recta. Gera as referências (u_{ref}, r_{ref}); - Controlador de velocidade horizontal com as referências (u_{ref}, r_{ref}).	- CW	imposição de θ_{ref} demasiado elevado pode provocar saturação dos propulsores, em regime permanente levando à instabilidade do movimento vertical. $\theta_{ref\ max}$ depende da velocidade u .
--	---	--	--------	--